1608/1162

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBRI PRIORES SEX,

ITEM

UNDECIMUS & DUODECIMUS.

Ex Verſione Latina

FREDERICI COMMANDINI.

QUIBUS ACCEDUNT.

Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ Elementa.

Item Tractatus de Natura & Arithmetica Logarithmorum.

In uſum Juventutis Academicæ.

EDITIO QUINTA, Auctior & Emendatior.

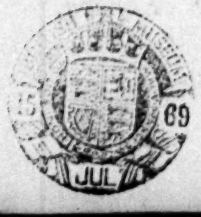
OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO, MDCCXLVII.
Impenſis *Ric. Clements* Bibliop. *Oxon.*
Proſtat apud *J. & J. Knapton, S. Birt, & J. & J. Rivington,*
Bibliop. *London.*

Imprimatur,

BER. GARDINER,

Vic. Can. *OXON.*

March 25. 1715.



PRÆFATIO.

POST tot nova Geometriæ Elementa, non ita pridem in lucem emissa, est fortasse quod miretur Tyro Mathematicus, annosa hæc, & (ut quibusdam videntur) obsoleta Euclidis στοιχεῖα *è prelo denuo prodire: præsertim cum non pauca in illis vitia detexisse sibi visi sint, qui Geometriam Elementarem novâ quadam methodo excolendam proponunt. Hi enim Lyncei Philosophi* Euclidis *Definitiones parum perspicuas, demonstrationes vix evidentes, res omnes malo ordine dispositas, aliasque mendas innumeras, per omnem antiquitatem ad sua usque tempora latentes, se invenisse jactant.*

At tantorum virorum pace, audacter assero, Euclidem ab iis immerito reprehensum esse, ejusque Definitiones distinctas & claras, è primis & simplicioribus principiis petitas esse, & conceptibus nostris faciliores; demonstrationes Elegantes perspicuas & concinnas; ratiocinandi vim adeo evidentem & nervosam, ut facile inducar credere obscuritatem istam à sciolis illis toties insimulatam, confusis potius & perplexis eorum ideis, quam demonstrationibus ipsis imputandum esse. Et utcunque nonnulli quærantur de malâ rerum dispositione, & iniquo ordine, quem tenet Euclides; aliam tamen methodum magis idoneam, & discentibus faciliorem inter omnia hoc genus scripta invenio nullam.

Non meum eſt hîc loci hypercriticis Horum captiunculis ſigillatim reſpondere: ſed in his Elementis vel mediocriter verſato, ſtatim patebit, Calumniatores hos ſuam potius oſcitantiam monſtrare, quam veros in noſtro authore lapſus arguere; imo ne hoc quidem dicere vereor, quod vix, & ne vix quidem unum, aut alterum è tot novis ſyſtematibus inveniri poteſt, in quibus plures non ſunt labes, imo fœdiores paralogiſmi, quam in Euclidem vel fingere potuerunt.

Poſt tot infelices in Geometriâ reformandâ conatus, quidam non infimi Geometræ Elementa de novo conſtruere non auſi, ipſum Euclidem omnibus aliis Elementorum Scriptoribus merito præluterunt, eique edendo ſuas curas impenderunt; hi tamen ipſi neſcio quibus opinionibus ducti, alias propoſitiones prorſus omittunt, aliarumque demonſtrationes in pejus mutant. Inter illos eminent Tacquetus & Deſchalles, quorum utrique malo quodam fato contigit, ut elegantes quaſdem & in Elementis optimo jure ponendas propoſitiones quaſi ineptas & inutiles rejecerint, quales ſunt propoſitiones 27, 28, 29. libri ſexti, cum aliis nonnullis quarum uſus fortaſſe illos latebat. Inſuper quandocunque ipſas Euclidis demonſtrationes deſerunt, multum in argumentando peccant, & à concinnitate Veterum recedunt.

In libro quinto demonſtrationes Euclidis in totum repudierunt, & Proportionis definitionem aliis terminis conceptam attulerunt; at quæ unam tantum è duabus proportionalium ſpeciebus comprehendit, & quantitatibus commenſurabilibus ſolummodo competit: nihilominus ſuas, quæ ſunt de proportione, demonſtrationes omni quantitati tam incom-

incommenſurabili quam commenſurabili in ſequentibus libris applicant. Hunc tam turpem lapſum nec Logici nec Geometræ facile condonaſſent, niſi hi authores in aliis ſuis ſcriptis de Scientiis Mathematicis benè meruiſſent. Hoc quidem commune eſt iis vitium cum omnibus hodiernis Elementorum Scriptoribus, qui in eundem impingunt ſcopulum, & ut ſuam in hac materia oſtentent peritiam, authorem noſtrum in re minime culpandâ imo laudandâ reprehendunt; Quantitatum proportionalium definitionem intelligo: in quâ intellectu facilem proportionalium proprietatem exponit, quæ quantitatibus omnibus tam incommenſurabilibus quam commenſurabilibus æque convenit, & à quâ cæteræ omnes proportionalium proprietates facile conſequuntur.

Hujus proprietatis demonſtrationem in Euclide deſiderant Egregii hi Geometræ, atque defectum demonſtratione ſuâ ſupplendum ſuſcipiunt. Hic iterum contemplari licet inſignem eorum in Logicâ peritiam, qui definitionis nominis demonſtrationem expectant: talis enim eſt hæc Euclidis definitio; qui illas quantitates proportionales vocat, quæ conditiones in definitione ſuâ allatas obtinent. Quidni primo Elementorum authori licebat, quælibet nomina quantitatibus hæc requiſita habentibus, arbitrio ſuo affigere? Licebat proculdubio; ſuo igitur utitur jure, & eas proportionales vocat.

Sed operæ pretium erit, methodum, quâ hanc proprietatem demonſtrare conantur, perpendere. Affectionem quandam uni tantum proportionalium generi, viz. commenſurabilium, congruentem aſſumunt; & exinde multis ambagibus longâque con-

cluſionum

cluſionum ſerie univerſalem, quam Euclides poſuit, proportionalium proprietatem deducunt; quod certe tam methodo quam argumentationis regulis ſatis alienum eſſe videtur. At longe rectius feciſſent, ſi proprietatem univerſalem ab Euclide aſſignatam primo poſuiſſent, & exinde particularem illam & uni tantum proportionalium ſpeciei congruentem deduxiſſent. Quoniam vero hanc reſpuerunt methodum, talem demonſtrationem ad definitiones libri quinti attexere libuit. Qui Euclidem ulterius defenſum videre cupiunt, conſulant eruditas & ſummo judicio conſcriptas Lectiones Mathematicas Cl. Barovii an. 1666.

Cum vero tanti Geometræ incidit mentio, præterire non poſſum Elementa ab eo edita, in quibus plerumque ipſius Euclidis conſtructiones & demonſtrationes retinet, ne unâ quidem omiſſa propoſitione. Hinc oritur major in demonſtrando vis, pulchrior conſtruendi methodus, & ubique Veterum Geometrarum genius clarius elucet, quam in libris iſtius generis fieri ſolet. Plura præterea Corollaria & Scholia adjecit, non modo breviori ſequentium demonſtrationi inſervientia, verum etiam aliis in rebus perutilia.

Nihilominus, demonſtrationes ejus eâ brevitate laborant, tot ſymbolis notiſque implicantur, ut in Geometriâ parum verſato difficiles & obſcuræ fiant. Multæ propoſitiones quæ ipſum Euclidem legenti perſpicuæ viderentur, Algebraicâ hac demonſtrandi methodo tyronibus nodoſæ & vix intelligibiles reddantur; qualis eſt V. G. 13. primi Elementi. Demonſtrationum, quas in Elemento ſecundo attulit, difficilis admodum tyronibus eſt intelligentia; re-

ctius

ctius multo Euclides ipſe earum evidentiam (ut in re Geometricâ fieri debet) à figurarum contemplatione petit. Scientiarum omnium Elementa ſimpliciſſimâ methodo tradenda ſunt, nec ſymbolis nec notis nec obſcuris principiis aliunde petitis involvenda.

Ut Elementa Barovii nimiâ brevitate, ſic ea, quæ à Clavio traduntur, moleſtâ prolixitate peccant. Scholiis enim Commentariiſque abundat nimis & luxuriat. Vix equidem arbitror Euclidem tam obſcuram eſſe, ut tantâ farraigne notarum indigeat; nec dubito quin tyrones omnes Euclidem ipſum omnibus ſuis Commentatoribus faciliorem inventuri ſint. In demonſtrationibus Geometricis ut nimia brevitas tenebras parit, ſic nimia verboſitas plus tædii & confuſionis quam lucis affert.

Hiſce præcipue inductus rationibus, prima ſex Euclidis Elementa cum undecimo & duodecimo, ex verſione Frederici Commandini *in uſum Juventutis Celeberrimæ hujus Academiæ per ſe edenda curavi; à cæteris abſtinui tum quia hæc, quæ jam damus, ad alias pleraſque Matheſeos partes, quæ nunc vulgo traduntur, intelligendas, ſufficiant, tum etiam quia omnia Euclidis opera, Græce & Latine nitidiſſimis Characteribus adornata ſummaque cura & fide emendata nuper è prælo Academico prodiere.*

Porro in gratiam eorum, qui Geometriam Elementarem ad Praxes vitæ commodis inſervientes applicare deſiderant, Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ compendium adjunxi, cujus Artis ope, magnitudines Geometricæ menſurantur, ipſarumque dimenſiones numeris ſubjiciuntur.

BRITISH MUSEUM
15 JUL 69

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

PUnctum eſt, cujus nulla eſt pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero eſt longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini ſunt puncta.

IV.

Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis interjicitur punctis.

V.

Superficies eſt id, quod longitudinem, & latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini ſunt lineæ.

VII.

Plana ſuperficies eſt quæ ex æquo ſuis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus eſt duarum linearum in plano ſeſe contingentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

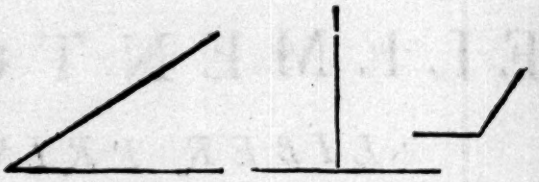
Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

X

Cum vero recta linea ſuper rectâ lineâ inſiſtens, eos, qui deinceps ſunt angulos, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque æqualium angulorum: & quæ inſiſtit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui inſiſtit.

XI.

Obtuſus angulus eſt, qui major eſt recto.



XII.

Acutus autem, qui recto eſt minor.

XIII.

Terminus eſt, quod alicujus extremum eſt.

XIV.

Figura eſt, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus eſt figura plana, una linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab uno puncto intra figuram exiſtente omnes rectæ lineæ pertingentes ſunt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

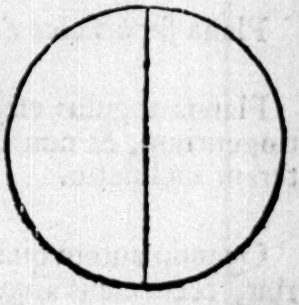
Diameter circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem, & bifariam circulum ſecat.

XVIII.

Semicirculus eſt figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipſa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Segmentum circuli eſt figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



XX.

XX.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

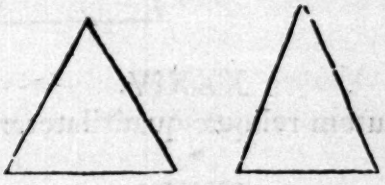
Multilateræ vero, quæ pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Iſoſceles, ſive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

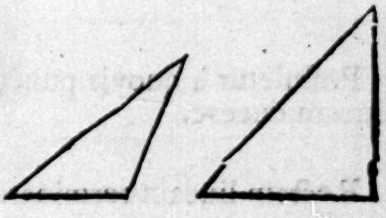


XXVI.

Scalenum vero eſt, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem eſt triangulum, quod rectum angulum habet.



XXVIII.

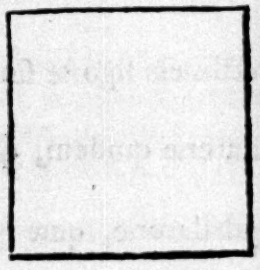
Obtuſangulum eſt, quod obtuſum habet angulum.

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum eſt, quod & æquilaterum eſt, & rectangulum.



XXXI.

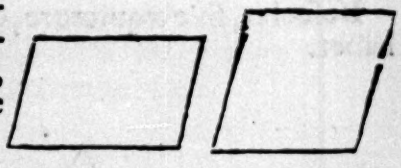
Altera parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem æquilatera vero non eſt.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, ſed rectangula non eſt.

XXXIII.

Rhomboides, quæ, & oppoſita latera, & oppoſitos angulos inter ſe æquales habens, neque æquilatera eſt, neque rectangula.



XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conveniunt.

POSTULATA.

I.

Poſtuletur à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam, in continuum & directum producere.

III.

Quovis centro, & intervallo circulum deſcribere.

AXIOMATA.

AXIOMATA.

I.

Quæ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.

II.

Et ſi æqualibus æqualia adjiciantur tota ſunt æqualia.

III.

Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt æqualia.

IV.

Et ſi inæqualibus æqualia adjiciantur, tota ſunt inæqualia.

V.

Et ſi ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt inæqualia.

VI.

Et quæ ejuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

VII.

Et quæ ejuſdem dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

VIII.

Et quæ ſibi mutuo congruunt, inter ſe ſunt æqualia.

IX.

Totum eſt ſua parte majus.

X.

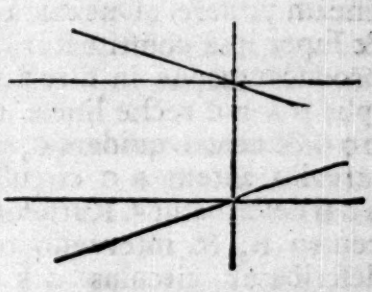
Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

XII.

Et ſi in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ in infinitum productæ, inter ſe conveniunt ex ea parte, in qua ſunt anguli duobus rectis minores.

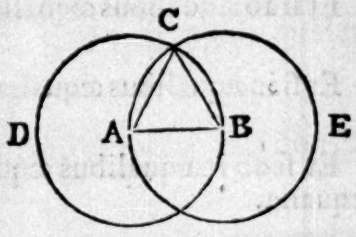


Not. *Cum plures anguli ad unum punctum exiſtunt deſignatur quilibet tribus literis, quarum illa quæ eſt ad verticem anguli, in medio ponitur.* V. G. *in figura Prop.* 13. *libri primi angulus à rectis* AB, BC *comprehenſus dicitur angulus* ABC, *& angulus à rectis* AB, BE *contentus dicitur angulus* ABE.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datâ rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum conſtituere.

Sit data recta linea terminata AB, oportet ſuper ipſa AB triangulum æquilaterum conſtituere. Centro quidem A intervallo autem AB circulus deſcribatur BCD[a]. Et rurſus centro B, intervalloque BA deſcribatur circulus ACE[a], & a puncto C, in quo circuli ſe invicem ſecant, ad AB ducantur rectæ lineæ CA CB[b]. Quoniam igitur A centrum eſt circuli DBC, erit AC ipſi AB[c] æqualis, rurſus quoniam B circuli CAE eſt centrum, erit BC æqualis BA: oſtenſa eſt autem & CA æqualis AB: utraque igitur ipſarum CA CB ipſi AB eſt æqualis. Quæ autem eidem ſunt æqualia, & inter ſe æqualia ſunt. Ergo CA ipſi CB eſt æqualis tres igitur CA AB, BC inter ſe ſunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum eſt ABC, & conſtitutum eſt ſuper data recta linea terminata AB. quod feciſſe oportebat.

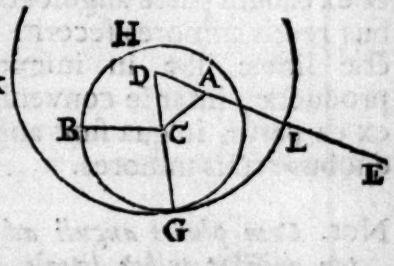


[a] 3. Poſt.
[b] 1. Poſt.
[c] 15. Def.

PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC. oportet ad A punctum, ipſi BC rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur à puncto A ad C recta linea AC[a]: & ſuper ipsâ conſtituatur triangulum æquilaterum DAC[b]. producanturque in directum ipſis DA DC rectæ lineæ AE CG[c]. & centro quidem C, intervallo autem BC circulus BGH deſcribatur[d]. Rurſuſque centro D, & intervallo DG deſcribatur circulus GKL. Quoniam igitur punctum C centrum eſt BGH circuli, erit BC ipſi CG æqualis[e]. Et rurſus quoniam D centrum eſt circuli GKL, erit DL æqualis DG: quarum DA eſt æqualis DC, reliqua igitur AL reliquæ GC eſt æqualis[f]. Oſtenſa autem



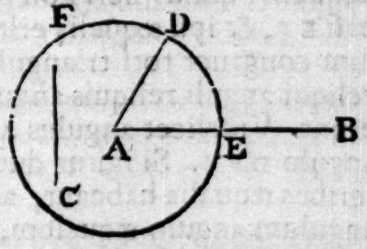
[a] Poſtul. 1.
[b] Prima hujus.
[c] Poſtul. 2.
[d] 3. Poſt.
[e] Def. 15.
[f] Axiom. 3.

autem eſt BC æqualis CG. Quare utraque ipſarum AL BC eſt æqualis ipſi CG. Quæ autem eidem æqualia ſunt & inter ſe ſunt æqualia. Ergo, & AL eſt æqualis BC. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC æqualis poſita eſt AL. Quod facere oportebat.

PROP. III. PROBL.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à majore minori æqualem abſcindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB & C; quarum major ſit AB. oportet à majore AB minori C æqualem rectam lineam abſcindere. Ponatur ad A punctum ipſi C æqualis recta linea AD [a], & centro quidem A, intervallo autem AD circulus deſcribatur DEF [b]. Et quoniam A centrum eſt DEF circuli, erit AE ipſi AD æqualis. Sed & C æqualis AD. Utraque igitur ipſarum AE, C ipſi AD æqualis erit. Quare & AE ipſi C eſt æqualis [c]. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus AB & C à majore AB minori C æqualis Abſciſſa eſt: Quod feciſſe oportebat.

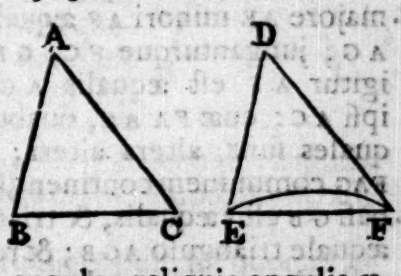


a Per antecedentem.
b Poſt. 3.
c Axiom. 1.

PROP. IV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: Et baſim baſi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE æquale, latus vero AC ipſi DF; & angulum BAC angulo EDF æqualem. Dico, & baſim BC baſi EF æqualem eſſe, & triangulum ABC æquale triangulo DEF, & reliquos angulos reliquis angulis æ-



quales, alterum alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur; nempe angulum A B C angulo D E F: & angulum A C B angulo D F E. Triangulo enim A B C applicato ipſi D E F, & puncto quidem A poſito in D, recta vero linea A B in ipſa D E: & punctum B puncto E congruet; quod A B ipſi D E ſit æqualis. Congruente autem A B ipſi D E; congruet & A C recta linea rectæ lineæ D F cum angulus B A C ſit æqualis angulo E D F. Quare, & C congruet ipſi F; eſt enim recta linea A C æqualis rectæ D F. Sed, & punctum B congruebat puncto E. Ergo, & baſis B C baſi E F congruet. Nam ſi puncto quidem B congruente ipſi E, C vero ipſi F; baſis B C baſi E F non congruit; duæ rectæ lineæ ſpatium comprehendent: quod [a] fieri non poteſt. Congruet igitur B C baſis, baſi E F, & ipſi æqualis erit. Quare & totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, & ipſi erit æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent, & ipſis æquales [b] erunt. Videlicet angulus A B C angulo D E F, & angulus A C B angulo D F E. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: quod oſtendere oportebat.

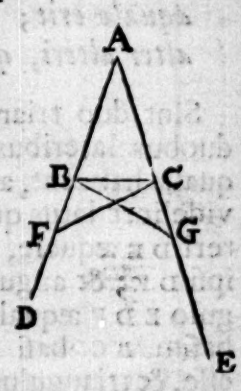
[a] Ax. 10.

[b] Axiom. 8.

PROP. V. THEOR.

Iſoſcelium triangulorum qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt.

Sit iſoſceles triangulum A B C; habens A B latus lateri A C æquale, & producantur in directum ipſis A B A C rectæ lineæ B D C E. Dico angulum quidem A B C angulo A C B, angulum vero C B D angulo B C E æqualem eſſe. Sumatur enim in linea B D, quodvis punctum F; atque à majore A E minori A F æqualis [a] auferatur A G; junganturque F C, G B. Quoniam igitur A F eſt æqualis A G; A B vero ipſi A C; duæ F A A C, duabus G A A B æquales ſunt, altera alteri; & angulum F A G communem continent, baſis igitur F C baſi G B eſt [b] æqualis, & triangulum A F C æquale triangulo A G B; & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera



[a] 3. hujus.

[b] 4. hujus.

latera ſubtenduntur: Videlicet angulus quidem ACF æqualis angulo ABG; angulus vero AFC angulo AGB. Et quoniam tota AF toti AG eſt æqualis; quarum AB eſt æqualis AC; erit [c] & reliqua BF reliquæ CG æqualis. Oſtenſa eſt autem FC æqualis GB. duæ igitur BF, FC duabus CG GB æquales ſunt, altera alteri; & angulus BFC æqualis angulo CGB: eſtque baſis ipſorum BC communis. Ergo & triangulum BFC triangulo CGB æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur. Angulus igitur FBC eſt æqualis angulo GCB; & angulus BCF angulo CBG. Itaque quoniam totus ABG angulus toto angulo ACF æqualis oſtenſus eſt, quorum angulus CBG eſt æqualis ipſi BCF: erit reliquus [d] ABC reliquo ACB æqualis; & ſunt ad baſim ABC trianguli: oſtenſus autem eſt & FBC angulus æqualis angulo GCB; qui ſunt ſub baſi. Iſoſcelium igitur triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli, qui ſunt ſub baſi, inter ſe æquales erunt. Quod oſtendiſſe oportebat.

[c] Axiom. 3.

[d] Axiom. 3.

Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum eſt quoque æquiangulum.

PROP. VI. THEOR.

Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt.

Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale eſſe: Si enim inæqualis eſt AB ipſi AC; altera ipſarum eſt major. Sit major AB; atque à majori AB minori AC æqualis [a] auferatur DB; & DC jungatur. Quoniam igitur DB eſt æqualis ipſi AC; communis autem BC: erunt duæ DB BC duabus AC CB æquales, altera alteri; & angulus DBC æqualis angulo ACB ex hyp. Baſis igitur DC baſi AB eſt [b] æqualis, & triangulum DBC æquale triangulo ACB, minus majori; quod eſt abſurdum. Non igitur inæqualis eſt AB ipſi AC. Ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt: quod monſtraſſe oportuit.

[a] 3. hujus.

[b] 4. hujus.

Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum eſt quoque æquilaterum.

PROP.

PROP. VII. THEOR.

In eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non conſtituentur ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdem quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

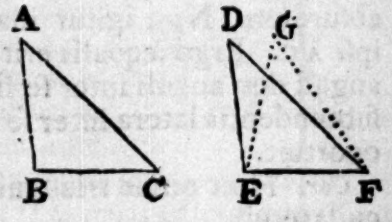
Si enim fieri poteſt, in eadem recta linea AB duabus eiſdem rectis lineis AC CB, aliæ duæ rectæ lineæ AD DB æquales, altera alteri conſtituantur ad aliud atque aliud punctum C & D, ad eaſdem partes ut ad C & D, eoſdem habentes terminos A & B quos primæ rectæ lineæ, ita ut CA quidem ſit æqualis DA, eundem, quem ipſa terminum, habens A; CB vero ſit æqualis DB, eundem habens B terminum; & CD jungatur. Itaque quoniam AC eſt æqualis AD; erit, & angulus ACD angulo ADC æqualis [a]. Major igitur eſt ADC angulus angulo BCD. Quare angulus BDC angulo BCD multo major erit. Rurſus quoniam CB eſt æqualis DB & angulus BDC æqualis erit angulo BCD: oſtenſus autem eſt ipſo multo major; quod fieri non poteſt. Non igitur in eadem recta linea duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri conſtituentur ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod oſtendiſſe oportebat.

[a] 5. hujus.

PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & baſim baſi æqualem; angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quæ duo latera AB, AC, duobus lateribus DE DF æqualia habeant alterum alteri; ut ſit AB quidem æquale DE; AC vero ipſi DF; habeant autem, & baſim BC baſi EF æqualem.



Dico

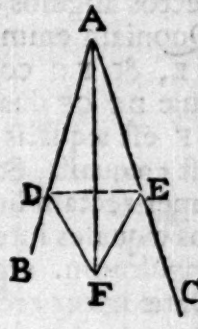
Dico angulum quoque BAC angulo EDF æqualem eſſe. Triangulo enim ABC applicato ipſi DEF triangulo, & puncto quidem B poſito in E; recta vero linea BC in EF: congruet & C punctum puncto F, quoniam BC ipſi EF eſt æqualis. Itaque congruente BC ipſi EF; congruent & BA AC ipſis ED DF. ſi enim baſis quidem BC baſi EF congruit; latera autem BA AC lateribus ED DF non congruunt, ſed ſitum mutant; ut EG GF: conſtituentur in eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud atque aliud punctum; ad eaſdem partes; eoſdem habentes terminos. non conſtituuntur autem; ut demonſtratum [a] eſt. non igitur, ſi baſis BC congruit baſi EF, non congruent & BA AC latera lateribus ED DF. congruent igitur. Quare & angulus BAC angulo EDF congruet, & ipſi erit æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & baſim baſi æqualem: angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt: quod demonſtrare opportebat.

[a] per 7. hujus.

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam ſecare.

Sit datus angulus rectilineus BAC; itaque oportet ipſum bifariam ſecare. Sumatur in linea AB quodvis punctum D; & à linea AC ipſi AD æqualis [a] auferatur AE; junctaque DE conſtituatur ſuper ea [b] triangulum æquilaterum DEF; & AF jungatur. Dico angulum BAC à recta linea AF bifariam ſecari. Quoniam enim AD eſt æqualis AE: communis autem AF. duæ DA AF duabus EA AF æquales ſunt, altera alteri; & baſis DF æqualis baſi EF. angulus [c] igitur DAF angulo EAF eſt æqualis. quare datus angulus rectilineus BAC à recta linea AF bifariam ſectus eſt; quod facere oportebat.



[a] 3. hujus.
[b] 1. hujus.
[c] 8. hujus.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam ſecare.

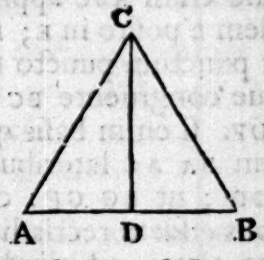
Sit data recta linea terminata AB; oportet ipſam AB bifariam ſecare. conſtituatur ſuper [a] ea triangulum æquilaterum ABC;

[a] 1. hujus.

ABC; & ſecetur ACB angulus [b] bifariam recta linea CD. Dico AB rectam lineam in puncto D bifariam ſecari. Quoniam enim AC eſt æqualis CB; communis autem CD; duæ AC CD duabus BC CD æquales ſunt; altera alteri; & angulus ACD æqualis angulo BCD. baſis igitur AD baſi BD eſt [c] æqualis. Et ob id recta linea terminata AB bifariam ſecta eſt in puncto D: quod facere oportebat.

[b] 9. hujus.

[c] 4. hujus.



PROP. XI. PROBL.

Data recta linea à puncto in ipſa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

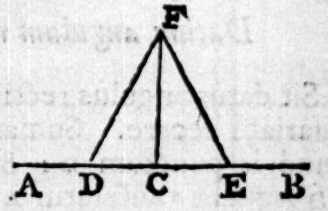
Sit data recta linea AB, & datum in ipſa punctum C. oportet à puncto C ipſi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in AC quodvis punctum D: ipſique CD æqualis [a] ponatur CE, & ſuper DE conſtituatur [b] triangulum æqualilaterum FDE, & FC jungatur. Dico datæ rectæ lineæ AB à puncto C in ipſa dato, ad rectos angulos ductam eſſe FC. Quoniam enim DC eſt æqualis CE, & FC communis; erunt duæ DC CF duabus EC CF æquales, altera alteri; & baſis DF eſt æqualis baſi FE, angulus igitur DCF angulo ECF eſt [c] æqualis, & ſunt deinceps. Quando autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens, eos qui deinceps ſunt angulos æquales inter ſe fecerit; rectus [d] eſt uterque æqualium angulorum. ergo uterque ipſorum DCF FCE eſt rectus. Datæ igitur rectæ lineæ AB à puncto in ipſa dato C ad rectos angulos ducta eſt FC recta linea. Quod feciſſe oportuit.

[a] 3. hujus.

[b] 1. hujus.

[c] 8. hujus.

[d] Def. 10.

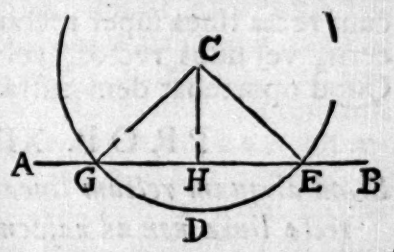


PROP. XII. PROBL.

Super data recta linea infinita, à dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita AB, datum vero punctum C, quod in ea non eſt. Oportet ſuper data recta linea

linea infinita AB, à dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipſius AB rectæ lineæ quodvis punctum D: & centro quidem C, intervallo autem CD circulus [a] deſcribatur EDG: & EG in H bifariam [b] ſecetur: jungantur CG CH CE, Dico ſuper data recta linea infinita AB, à dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularem CH ductam eſſe. Quoniam enim æqualis eſt GH ipſi HE, communis autem HC, duæ GH HC, duabus EH HC æquales ſunt, altera alteri; & baſis CG eſt æqualis baſi CE. Angulus igitur CHG angulo CHE eſt [c] æqualis, & ſunt deinceps. cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens, eos qui deinceps ſunt angulos, æquales inter ſe fecerit; rectus [d] eſt uterque æqualium angulorum & quæ inſiſtit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui inſiſtit. ergo ſuper data recta linea infinita AB à dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularis ducta eſt CH. Quod facere oportebat.



[a] Poſtul. 3.

[b] 10. hujus.

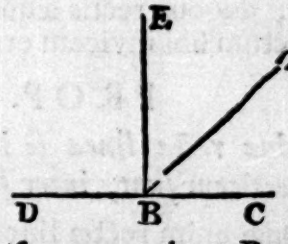
[c] 8. hujus.

[d] Def. 10.

PROP. XIII. THEOR.

Cum recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam AB ſuper rectam CD conſiſtens angulos faciat CBA ABD. Dico CBA ABD angulos vel duos rectos eſſe, vel duobus rectis æquales; ſi enim CBA eſt æqualis ipſi ABD; duo recti [a] ſunt; ſin minus, ducatur à puncto B ipſi CD ad rectos [b] angulos BE. anguli igitur CBE EBD ſunt duo recti. Et quoniam CBE, duobus CBA ABE eſt æqualis, communis apponatur EBD: ergo anguli CBE EBD tribus angulis CBA ABE EBD ſunt [c] æquales. Rurſus quoniam DBA angulus eſt æqualis duobus DBE EBA, communis apponatur ABC. anguli igitur DBA ABC tribus DBE EBA ABC æquales ſunt. At oſtenſum eſt angulos quoque CBE EBD eiſdem tribus æquales eſſe: quæ vero eidem ſunt æqualia, [d] & inter ſe æqualia ſunt: ergo & anguli CBE EBD ipſis DBA ABC ſunt æquales, ſuntque CBE EBD duo recti anguli



[a] Def. 10.

[b] 11. hujus.

[c] Axiom. 2.

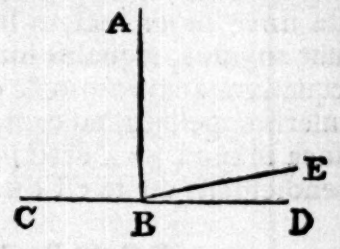
[d] Axiom. 1.

anguli, igitur DBA ABC duobus rectis æquales erunt. ergo cum recta linea ſuper rectam lineam conſiſtens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonſtrare

PROP. XIV. THEOR.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes poſitæ, angulos qui deinceps ſunt, duobus rectis æquales fecerint; ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi invicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duæ rectæ lineæ BC BD non ad eaſdem partes poſitæ angulos, qui deinceps ſunt, ABC ABD duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipſi CB in directum eſſe. ſi enim BD non eſt in directum ipſi CB, ſit ipſi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB ſuper rectam CBE conſiſtit; anguli ABC ABE [a] duobus rectis ſunt æquales. Sed & angnli ABC ABD ſunt æquales duobus rectis. Anguli igitur CBA ABE ipſis CBA ABD æquales erunt. Communis auferatur ABC. Ergo reliquus ABE reliquo ABD eſt æqualis, minor majori quod fieri non poteſt. Non igitur BE eſt in directum ipſi BC. Similiter oſtendemus neque aliam quampiam eſſe, præter BD. Ergo CB ipſi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes poſitæ angulos, qui deinceps ſunt, duobus rectis æquales fecerint, ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi invicem erunt. Quod demonſtrare oportebat.

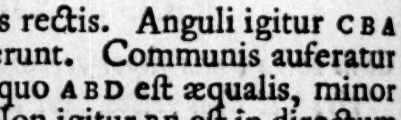


[a] 13. hujus.

PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecuerint, angulos qui ad verticem ſunt, inter ſe æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD ſe invicem ſecent in puncto E. Dico angulum quidem AEC angulo DEB; angulum vero CEB angulo AED æqualem eſſe. Quoniam enim recta linea AE ſuper rectam CD conſiſtens angulos facit CEA AED; erunt hi [a] duobus rectis æquales



[a] 13. hujus.

æquales. Rurſus quoniam recta linea DE ſuper rectam AB conſiſtens facit angulos AED DEB; erunt AED DEB anguli æquales [a] duobus rectis. Oſtenſum autem eſt angulos quoque CEA AED duobus rectis eſſe æquales. Anguli igitur CEA AED angulis AED DEB æquales ſunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus [b] CEA reliquo BED eſt æqualis. Simili ratione, & anguli CEB DEA æquales oſtenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecuerint, angulos, qui ad verticem ſunt, æquales efficient. Quod oſtendere oportebat.

[b] Axiom. 3.

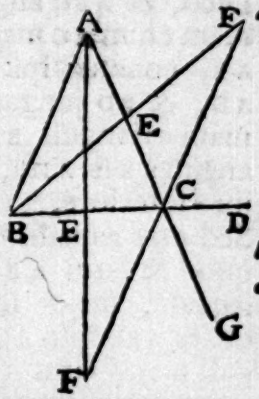
Cor. 1. Ex hoc manifeſte conſtat duas rectas lineas ſe invicem ſecantes, facere angulos ad ſectionem quatuor rectis æquales.

Cor. 2. Omnes anguli circa unum punctum conſtituti conficiunt angulos quatuor rectis æquales.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & oppoſito eſt major.

Sit triangulum ABC, & unum ipſius latus BC ad D producatur. Dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore, & oppoſito, videlicet CBA, & BAC majorem eſſe. Secetur enim AC bifariam [a] in E, & juncta BE producatur ad F; ponaturque ipſi BE æqualis EF. Jungatur præterea FC & AC ad G producatur. Quoniam igitur AE quidem eſt æqualis EC, BE vero ipſi EF, duæ AE EB duabus CE EF æquales ſunt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC eſt æqualis [b], ad verticem enim ſunt. Baſis igitur AB æqualis [c] eſt baſi FC; & AEB triangulum triangulo FEC & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Ergo angulus BAE eſt æqualis angulo ECF. Sed ECD angulus major eſt ipſo ECF. Major igitur eſt angulus ACD angulo BAE. Similiter recta linea BC bifariam ſecta, oſtendetur etiam BCG angulus, hoc eſt ACD angulus angulo ABC major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & oppoſito major eſt. Quod oportebat demonſtrare.



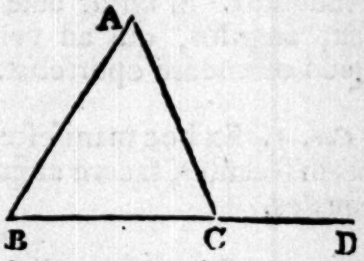
[a] 10. hujus.
[b] 15. hujus.
[c] 4. hujus.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores ſunt, quomodocunque ſumpti.

Sit triangulum ABC. Dico ipſius ABC trianguli duos angulos quomodocunque ſumptos duobus rectis minores eſſe. Producatur enim BC ad D. Et quoniam trianguli ABC exterior angulus ACD major [a] eſt interiore, & oppoſito ABC: communis apponatur ACB. Anguli igitur ACD ACB angulis ABC ACB majores ſunt. Sed ACD ACB ſunt [b] æquales duobus rectis. Ergo ABC BCA duobus rectis ſunt minores. Similiter demonſtrabimus angulos quoque BAC ACB itemque CAB ABC duobus rectis minores eſſe. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores ſunt; quomodocunque ſumpti. Quod demonſtrare oportebat.

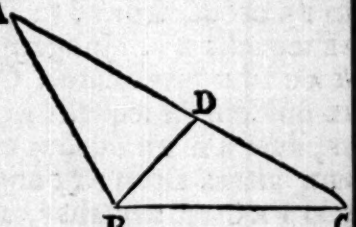


[a] 16. hujus.
[b] 13. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus. Dico, & ABC angulum angulo BCA majorem eſſe. Quoniam enim AC major eſt, quam AB, ponatur ipſi AB æqualis AD; & BD jungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus eſt ADB, erit is major [a] interiore, & oppoſito DCB. Sed ADB æqualis [b] eſt ipſi ABD, quod & latus AB lateri AD ſit æquale, major igitur eſt & ABD angulus angulo ACB, quare ABC ipſo ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit: quod oportebat demonſtrare.



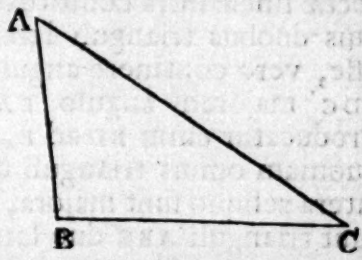
[a] 16. hujus.
[b] 5. hujus.

PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli major angulus majus latus ſubtendit.

Sit triangulum ABC majorem habens ABC angulum angulo BCA. Dico & latus AC latere AB majus eſſe. Si enim non

non eſt majus, vel AC eſt æquale ipſi AB, vel ipſo minus, æquale igitur non eſt, nam & angulus ABC angulo ACB æqualis [a] eſſet; non eſt autem. Non igitur AC ipſi AB eſt æquale. Sed neque minus. eſſet enim & angulus ABC angulo ACB minor [b]. atqui non eſt, non igitur AC minus eſt ipſo AB. Oſtenſum autem eſt neque æquale eſſe: ergo AC ipſo AB eſt majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus ſubtendit. Quod oportebat demonſtrare



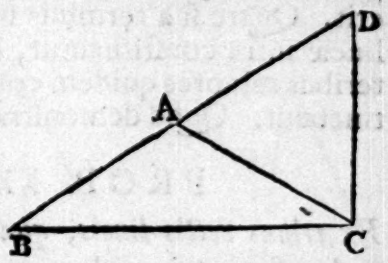
[a] 5. hujus.

[b] 18. hujus.

PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora ſunt, quomodocunque ſumpta.

Sit enim triangulum ABC. Dico ipſius ABC trianguli duo latera reliquo majora eſſe, quomodocunque ſumpta: videlicet latera quidem BA AC majora latere BC; latera vero AB BC majora latere AC; & latera BC CA majora ipſo AB. Producatur enim BA ad punctum D; ponaturque ipſi CA æqualis AD [a]; & DC jungatur. Quoniam igitur DA eſt æqualis AC erit & angulus ADC angulo ACD æqualis [b]. Sed BCD angulus major eſt angulo ACD. Angulus igitur BCD angulo ADC eſt major; Et quoniam triangulum eſt DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC; majorem autem angulum majus latus ſubtendit [c]: erit latus DB latere BC majus. ſed DB eſt æquale ipſis BA AC. quare latera BA AC ipſo BC majora ſunt. ſimiliter oſtendemus, & latera quidem AB BC majora eſſe latere CA: latera vero BC CA ipſo AB majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora ſunt, quomodocunque ſumpta. Quod oſtendere oportebat.



[a] 3. hujus.

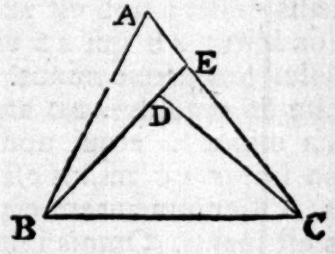
[b] 5. hujus.

[c] 19. hujus.

PROP. XXI. THEOR.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra conſtituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in uno latere BC à terminis B, C duæ rectæ lineæ intra conſtituantur BD DC. Dico BD DC reliquis duobus trianguli lateribus BA AC minores quidem eſſe, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC. Producatur enim BD ad E. & quoniam omnis trianguli duo

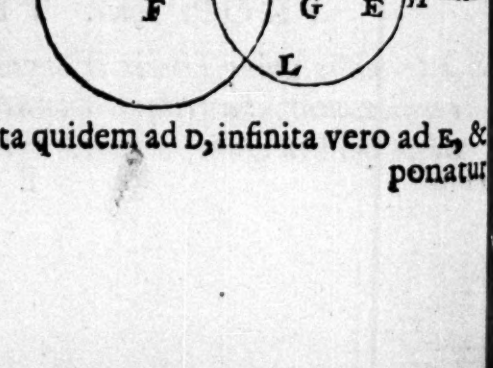


[a] 20. hujus. latera reliquo ſunt majora, [a] erunt trianguli ABE duo latera BA AE majora latere BE. communis apponatur EC. ergo [b] Axiom. 4. BA AC ipſis BE EC majora [b] ſunt. rurſus quoniam CED trianguli duo latera CE ED ſunt majora latere CD, communis apponatur DB. quare CE EB ipſis CD DB ſunt majora [b]. Sed oſtenſum eſt BA AC majora eſſe BE EC. multo igitur BA AC ipſis BD DC majora ſunt. rurſus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore & oppoſito eſt major [c]: erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipſo CED. Eadem ratione & trianguli ABE exterior angulus CEB ipſo [c] 16. hujus. BAC eſt major [c] ſed angulus BDC oſtenſus eſt major angulo CEB. multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare ſi à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra conſtituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XXII. PROBL.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales ſunt, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua majores eſſe, quomodocunque ſumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora ſunt, quomodocunque ſumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A, B, C, quarum duæ reliquæ majores ſint, quomodocunque ſumptæ, ut ſcil. A, B, quidem ſint majores quam C, A, C, vero majores quam B, & præterea B, C, majores quam A. Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipſis A, B, C, triangulum conſtituere. Exponatur aliqua recta linea DE, terminata quidem ad D, infinita vero ad E, & ponatur



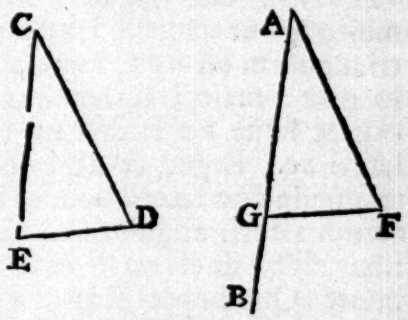
ponatur ipſi quidem A æqualis [a] DF, ipſi vero B æqualis FG, & ipſi C æqualis GH: & centro F, intervallo autem FD circulus [b] deſcribatur DKL. rurſuſque centro G, & intervallo GH alius circulus KLH, deſcribatur, & jungantur KF KG. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipſis A, B, C, triangulum KFG conſtitutum eſſe, quoniam enim punctum F centrum eſt DKL circuli; erit FD æqualis [c] FK. ſed FD eſt æqualis A. Ergo & FK ipſi A eſt æqualis. rurſus quoniam punctum G centrum eſt circuli LKH, erit GH æqualis [c] GK. ſed GH eſt æqualis C. ergo & GK ipſi C æqualis erit. eſt autem & FG æqualis B: tres igitur rectæ lineæ KF FG GK tribus A, B, C, æquales ſunt. Quare ex tribus rectis lineis KF FG GK, quæ ſunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum conſtitutum eſt KFG. Quod facere oportebat.

[a] 3. hujus.
[b] 3. Poſtul.
[c] Def. 15.

PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipſa punctum A; & datus angulus rectilineus DCE. Oportet igitur ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE, æqualem angulum rectilineum conſtituere. Sumantur in utraque ipſarum CD CE quævis puncta D, E, ducaturque DE, & ex tribus rectis lineis, quæ æquales ſint tribus CD DE EC triangulum [a] conſtituatur AFG, ita ut CD ſit æqualis AF, & CE ipſi AG, & DE ipſi FG. Itaque quoniam duæ DC CE duabus FA AG æquales ſunt, altera alteri, & baſis DE eſt æqualis baſi FG: erit & angulus DCE angulo FAG æqualis [b]. Ad datam igitur rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE æqualis angulus rectilineus conſtitutus eſt FAG. Quod facere oportebat.



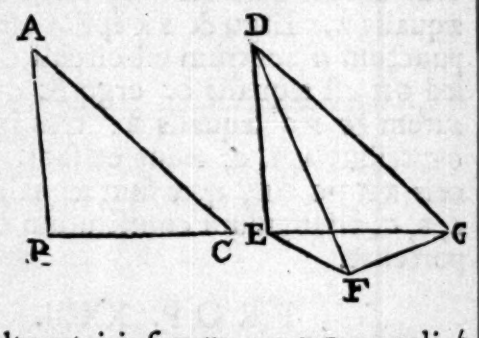
[a] 22. hujus.
[b] 8. hujus.

PROP. XXIV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem,

qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB æquale lateri DE; latus vero AC æquale DF: At angulus BAC angulo EDF ſit major. Dico, & baſim BC baſi EF majorem eſſe. Quoniam enim angulus BAC major eſt angulo EDF, conſtituatur [a] ad rectam lineam DE, & ad punctum in ea D, angulo BAC æqualis angulus EDG, ponaturque alterutri ipſarum AC DF æqualis [b] DG, & GE FG jungantur. itaque quoniam AB quidem eſt æqualis DE, AC vero ipſi DG, duæ BA AC duabus ED DG æquales ſunt, altera alteri; & angulus BAC eſt æqualis angulo EDG. ergo baſis BC baſi EG eſt [c] æqualis. rurſus quoniam æqualis eſt DG ipſi DF; eſt angulus DFG angulo DGF [d] æqualis: erit itaque DFG angulus angulo EGF major. multo igitur major eſt EFG angulus ipſo EGF. & quoniam triangulum eſt EFG, angulum EFG majorem habens angulo EGF; majori autem angulo latus majus ſubtenditur [e]; erit & latus EG latere EF majus. ſed EG latus eſt æquale lateri BC. Ergo, & BC ipſo EF majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi majorem habebunt. Quod oportebat demonſtrare.



[a] 23. hujus. [b] 3. hujus. [c] 4. hujus. [d] 5. hujus. [e] 19. hujus.

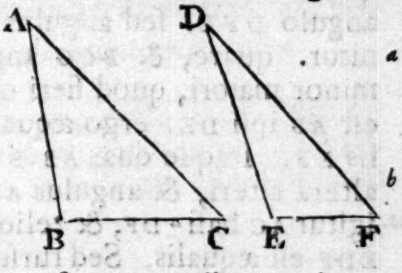
PROP. XXV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, baſim vero baſi majorem: & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE, & latus AC lateri DF; baſis autem BC baſi EF ſit major. Dico, & angulum

BAC

BAC angulo EDF majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus BAC angulo EDF: esset enim & basis BC basi EF æqualis [a]. Non est autem. Non igitur æqualis est BAC angulus angulo EDF. Sed neque minor. minor enim esset [b] & basis BC basi EF. Atqui non est. Non igitur angulus BAC angulo EDF est minor. ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo angulus BAC angulo EDF necessario major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; & angulum angulo qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. Quod demonstrare oportebat.



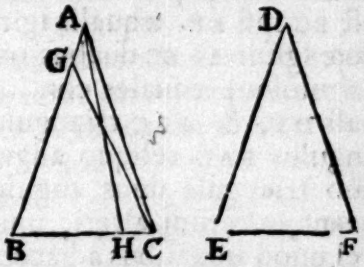
[a] 4. hujus.

[b] 24. hujus.

PROP. XXVI. THEOR.

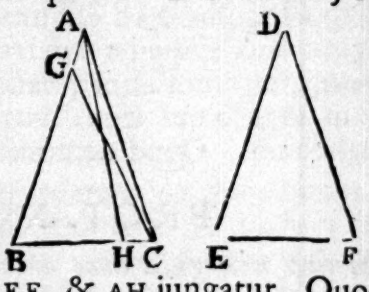
Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium anglorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC æqualem angulo DEF; angulum vero BCA angulo EFD. Habeant autem, & unum latus uni lateri æquale, & primo quod æqualibus adjacet angulis; nempe latus BC lateri EF. Dico, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus sc. AB lateri DE; & latus AC ipsi DF, & reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est AB ipsi DE, una ipsarum major est. Sit major AB, ponaturque GB æqualis DE; & GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem est æqualis DE, BC vero ipsi EF, duæ GB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus GBC æqualis angulo DEF. basis igitur GC basi DF est [a] æqualis: & GBC triangulum triangulo DEF, & reliqui



[a] 4. hujus.

liqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. ergo GCB angulus eſt æqualis angulo DFE. ſed angulus DFE angulo BCA æqualis ponitur. quare, & BCG angulus angulo BCA eſt æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur inæqualis eſt AB ipſi DE. ergo æqualis erit. eſt autem, & BC æqualis EF. Itaque duæ AB BC duabus DE EF æquales ſunt, altera alteri, & angulus ABC, æqualis angulo DEF. Baſis
a 4. hujus. igitur AC baſi[a] DF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF eſt æqualis. Sed rurſus ſint latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur æqualia, ut AB ipſi DE. Dico rurſus, &



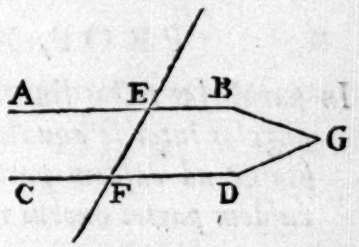
reliqua latera reliquis lateribus æqualia eſſe; AC quidem ipſi DF, BC vero ipſi EF: & adhuc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis eſt BC ipſi EF, una ipſarum major eſt. Sit major BC, ſi fieri poteſt, ponaturque BH æqualis EF, & AH jungatur. Quoniam igitur BH quidem eſt æqualis EF, AB vero ipſi DE; duæ AB BH duabus DE EF æquales ſunt, altera alteri, & angulos æquales continent; ergo[a] baſis AH baſi DF eſt æqualis: & ABH triangulum triangulo DEF & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Æqualis igitur eſt angulus BHA
b ex hyp. angulo EFD. ſed EFD eſt æqualis[b] angulo BCA. Ergo, & BHA angulus angulo BCA eſt æqualis. trianguli igitur AHC exterior angulus BHA æqualis eſt interiori & op-
c 16. hujus. poſito BCA, quod fieri non poteſt[c]. quare non inæqualis eſt BC ipſi EF. æqualis igitur. eſt autem & AB æqualis DE. duæ igitur AB BC duabus DE EF æquales ſunt, altera alteri; anguloſque æquales continent. quare baſis AC æqualis eſt baſi DF, & ABC triangulum triangulo DEF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF eſt æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum ſubtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas AB CD, recta linea EF incidens alternos angulos AEF EFD æquales inter ſe faciat. Dico rectam lineam AB ipſi CD parallelam eſſe. Si enim non eſt parallela, productæ AB, CD, vel ad partes B D convenient, vel ad partes A C. producantur, conveniantque ad partes B D in puncto G. itaque GEF trianguli exterior angulus AEF major [a] eſt interiore & oppoſito EFG. ſed & æqualis [b], quod fieri non poteſt. non igitur AB CD productæ ad partes BD convenient. ſimiliter demonſtrabitur neque convenire ad partes AC. quæ vero in neutras partes conveniunt, parallelæ [c] inter ſe ſunt. parallela igitur eſt AB ipſi CD. Quare ſi in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, parallelæ inter ſe erunt rectæ lineæ. Quod oſtendere oportebat.

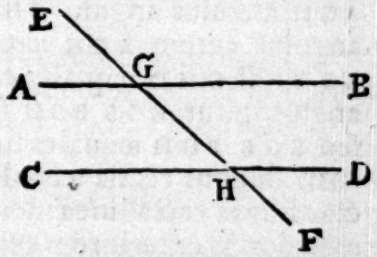


[a] 16. hujus.
[b] ex hyp.
[c] Def. 35.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter ſe rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas AB CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori, & oppoſito GHD æqualem faciat; vel interiores & ad eaſdem partes BGH GHD, duobus rectis æquales. Dico rectam lineam AB rectæ CD parallelam eſſe. Quoniam enim EGB angulus æqualis eſt [a] angulo GHD, angulus autem EGB angulo AGH [b], erit & angulus AGH angulo GHD æqualis: & ſunt alterni. parallela igitur eſt AB ipſi CD [c]. rurſus quoniam anguli BGH GHD duobus rectis ſunt æquales [a], & ſunt AGH BGH æquales



[a] Ex hyp.
[b] 15. hujus.
[c] Ex antecedente.

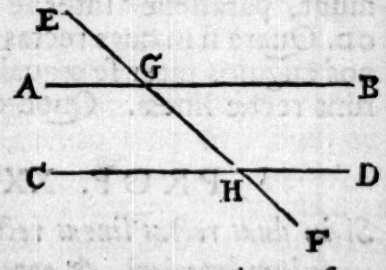
quales duobus rectis[d]: erunt anguli AGH BGH angulis BGH GHD æquales. communis auferatur BGH. reliquus igitur AGH eſt æqualis reliquo GHD: & ſunt alterni. ergo AB ipſi CD parallela erit[c]. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter ſe rectæ lineæ. Quod demonſtrare oportebat.

d 13. hujus.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter ſe æquales, & exteriorem interiori & oppoſito & ad eaſdem partes æqualem, & interiores, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat EF. Dico alternos angulos AGH GHD inter ſe æquales efficere, & exteriorem EGB interiori, & oppoſito, & ad eaſdem partes GHD æqualem: & interiores, & ad eaſdem pates BGH GHD duobus rectis æquales. Si enim inæqualis eſt AGH ipſi GHD, unus ipſorum major eſt. ſit major AGH. & quoniam AGH angulus major eſt angulo GHD; communis apponatur BGH. anguli igitur AGH BGH angulis BGH GHD majores ſunt. ſed anguli AGH BGH ſunt æquales duobus rectis[a]. ergo BGH GHD anguli ſunt duobus rectis minores. quæ vero à minoribus, quam ſunt duo recti, in infinitum producuntur rectæ lineæ, inter ſe conveniunt[b]. ergo rectæ lineæ AB CD in infinitum productæ convenient inter ſe. atqui non conveniunt cum parallelæ ponantur. non igitur inæqualis eſt AGH angulus angulo GHD. quare neceſſario eſt æqualis. angulus autem AGH æqualis eſt angulo EGB[c]. ergo, & EG B ipſi GHD æqualis erit. communis apponatur BGH. anguli igitur EGB BGH ſunt æquales angulis BGH GHD. ſed EGB BGH æquales ſunt duobus rectis: Ergo, & BGH GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter ſe æquales & exteriorem interiori, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem; & interiores, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonſtrare.



a 13. hujus.

b Axiom. 12.

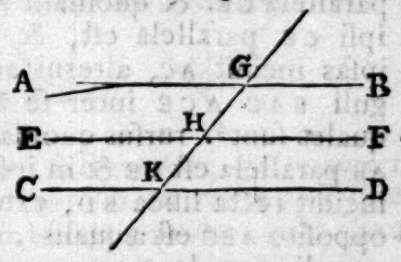
c 15. hujus.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, & inter ſe parallelæ erunt.

Sit utraque ipſarum AB CD ipſi EF parallela. Dico & AB ipſi CD parellelam eſſe. Incidat enim in ipſas recta linea GK. & quoniam in parallelas rectas lineas AB EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF eſt æqualis [a]. rurſus quoniam in parallelas rectas lineas EF CD, recta linea incidit GK, æqualis eſt GHF angulus angulo GKD [a]. oſtenſus autem eſt, & angulus AGK angulo GHF æqualis. ergo, & AGK ipſi GKD æqualis erit. & ſunt alterni. parallela igitur eſt AB ipſi CD [b]. ergo quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, & inter ſe parallelæ erunt. Quod oportebat demonſtrare.



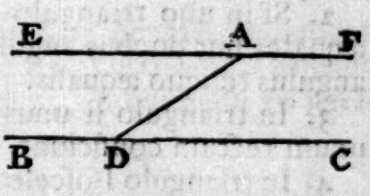
[a] 29. hujus.

[b] 27. hujus.

PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC oportet per A punctum ipſi BC rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quodvis punctum D, & jungatur AD: conſtituaturque [a] ad rectam lineam DA, & ad punctum in ipſa A, angulo ADC æqualis angulus DAE: & in directum ipſi EA recta linea AF producatur. Quoniam igitur in duas rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter ſe æquales efficit, EF ipſi BC parallela erit [b]. Per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta eſt recta linea EAF. Quod facere oportebat.



[a] 23. hujus.

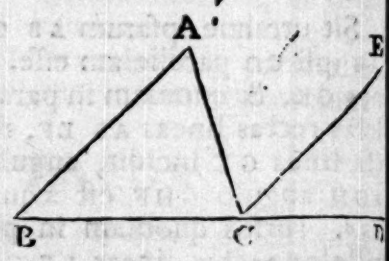
[b] 27. hujus.

PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppoſitis eſt æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales ſunt.

Sit

Sit triangulum ABC: & unum ipſius latus BC in D producatur. Dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus, & oppoſitis CAB ABC æqualem eſſe; & trianguli tres interiores angulos ABC BCA CAB duobus rectis eſſe æquales. Ducatur[a] enim per punctum C ipſi AB rectæ lineæ parallela CE. & quoniam AB ipſi CE parallela eſt, & in ipſas incidit AC, alterni anguli BAC ACE inter ſe æquales ſunt[b]. rurſus quoniam AB parallela eſt CE & in ipſas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori & oppoſito ABC eſt æqualis[b]. oſtenſus autem eſt angulus ACE æqualis angulo BAC. quare totus ACD exterior angulus æqualis eſt duobus interioribus, & oppoſitis BAC ABC. communis apponatur ACB. anguli igitur ACD ACB tribus ABC BAC ACB æquales ſunt. ſed anguli ACD ACB ſunt æquales[c] duobus rectis. ergo & ACB CBA CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppoſitis eſt æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales ſunt. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 31. hujus.
[b] 29. hujus.
[c] 13. hujus.

COROLLARIA.

1. Omnes tres anguli cujuſque trianguli ſimul ſumpti æquales ſunt tribus angulis cujuſque alterius trianguli ſimul ſumptis.

2. Si in uno triangulo duo anguli aut ſinguli aut ſimul æquales ſint duobus angulis alterius trianguli, erit reliquus angulus reliquo æqualis.

3. In triangulo ſi unus angulus rectus ſit, reliqui ſimul unum rectum conficiunt.

4. In triangulo Iſoſcele ſi angulus æquis cruribus contentus rectus ſit, reliqui ad baſim ſunt ſemirecti.

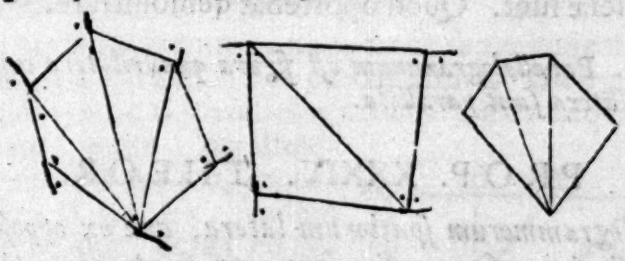
5. In triangulo æquilatero angulus quilibet æqualis eſt duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

THEOREMA.

Omnes ſimul interiores anguli cujuſcunque figuræ rectilinæ conficient bis tot rectos demptis quatuor quot ſunt latera figuræ.

Nam figura unaquæque rectilinea reſolvi poteſt in triangula binario pauciora quam ſunt ipſius figuræ latera, V. G. quatuor latera habeat reſolvitur in duo triangula, ſi quinque in tri-

tria triangula, ſi ſex in quatuor, & ſic deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot ſunt triangula, ſed omnes horum triangulorum



anguli æquales ſunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales ſunt bis tot rectis quot ſunt triangula, hoc eſt bis tot rectis demptis quatuor quot ſunt latera figuræ. Q. E. D.

THEOR. II.

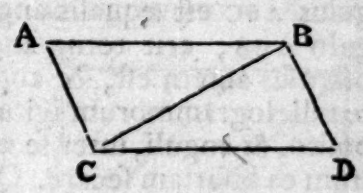
Omnes ſimul exteriores anguli cujuſque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

Nam exteriores ſimul cum interioribus conficiunt bis tot rectos quot ſunt latera figuræ; vero ex precedente Theor. omnes interiores ſoli conficiunt bis tot rectos demptis quatuor quot ſunt latera figuræ, quare exteriores conficiunt quatuor rectos. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Quæ æquales, & parallelas ad eaſdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.

Sint æquales, & parallelæ AB CD: & ipſas conjungant ad eaſdem partes rectæ lineæ AC BD. Dico AC BD æquales, & parallelas eſſe. Ducatur enim BC, & quoniam AB parallela eſt CD, in ipſaque incidit BC; alterni anguli ABC BCD æquales ſunt [a]. rurſus quoniam AB eſt æqualis CD, communis autem BC, duæ AB BC duabus BC CD ſunt æquales; & angulus ABC æqualis angulo BCD; baſis igitur AC baſi BD eſt æqualis [b]: triangulumque ABC triangulo BCD: & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. ergo angulus ACB angulo CBD eſt æqualis. & quoniam in duas rectas lineas AC BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB CBD æquales



[a] 29. hujus.

[b] 4. hujus.

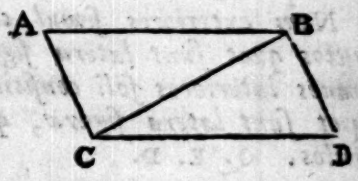
c 27. hujus. les inter se efficit, parallela est AC ipsi BD c, Ostensa autem est & ipsi æqualis. Quæ igitur æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. Quod oportebat demonstrare.

Defin. *Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus bina opposita latera sunt parallela.*

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt; & diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum ABDC, cujus diameter BC. Dico ACDB parallelogrammi latera, quæ ex opposito, & angulos inter se æqualia esse; & diametrum BC ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est AB ipsi CD, & in ipsas incidit recta linea BC; anguli alterni ABC BCD inter se æquales sunt a. rursus quoniam AC ipsi BD parallela est, & in ipsas incidit BC; alterni anguli ACB CBD æquales sunt inter se a. duo igitur triangula sunt ABC CBD, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis BCD CBD æquales habent, alterum alteri; & unum latus uni lateri æquale, scil. quod eſt ad æquales angulos, utrique commune BC. ergo, b & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem, æquale igitur est latus quidem AB lateri CD: latus vero AC ipsi BD, & angulus BAC angulo BDC æqualis. & quoniam angulus ABC est æqualis angulo BCD; & angulus CBD, angulo ACB; erit totus angulus ABD æqualis toti ACD. ostensus autem est, & angulus BAC angulo BDC æqualis. parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt. Dico etiam diametrum ea bifariam secare. Quoniam enim æqualis est AB ipsi CD communis autem BC. duæ AB BC duabus DC CB æquales sunt, altera alteri, & angulus ABC æqualis est angulo BCD. c 4. hujus. basis igitur c AC basi DB æqualis. quare, & triangulum ABC triangulo BCD æquale erit. ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam secat. Quod oportebat demonstrare.



a 29. hujus.

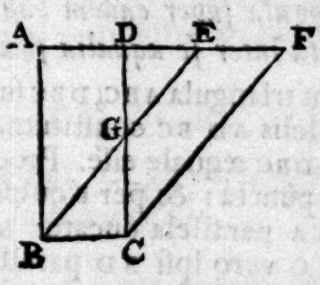
b 26. hujus.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in iiſdem parallelis conſtituta, inter ſe æqualia ſunt.

Sint parallelogramma ABCD, EBCF ſuper eadem baſi BC, & in eiſdem parallelis AF BC conſtituta. Dico parallelogrammum ABCD parallelogrammo EBCF æquale eſſe. Quoniam enim parallelogrammum eſt ABCD, æqualis [a] eſt AD ipſi BC. eadem quoque ratione, & EF eſt æqualis BC. quare &, AD ipſi EF æqualis erit [b]: & communis DE. tota igitur AE [c] toti DF eſt æqualis. eſt autem, & AB æqualis DC. ergo duæ EA AB duabus FD DC æquales ſunt, altera alteri, & angulus FDC æqualis angulo EAB, exterior interiori [d], baſis igitur EB baſi FC eſt [e] æqualis, & EAB triangulum æquale triangulo FDC. commune auferatur DGE. reliquum igitur trapezium ABGD reliquo trapezio EGCF eſt æquale [f]. commune apponatur GBC triangulum. ergo totum parallelogrammum ABCD toti parallelogrammo EBCF æquale erit. Parallelogramma igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

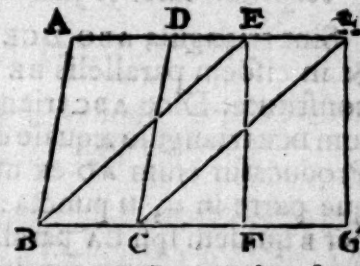


[a] 34. hujus.
[b] Axion. 1.
[c] Axiom. 2.
[d] 29. hujus.
[e] 4. hujus.
[f] Axiom 3.

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt.

Sint parallelogramma ABCD EFGH ſuper æqualibus baſibus BC FG, & in eiſdem parallelis AH BG conſtituta. Dico parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale eſſe. Conjungantur enim BE CH. & quoniam æqualis [a] eſt BC ipſi FG, & FG æqualis ipſi EH; erit & BC ipſi EH æqualis. ſuntque parallelæ, & ipſas conjungunt BE CH; quæ autem æquales, & parallelas ad eaſdem partes conjungunt, æquales, & parallelæ ſunt [b]. ergo EB, CH & æquales ſunt, & parallelæ: quare EBCH parallelogrammum eſt, & æquale parallelogrammo ABCD [c]; baſim enim eandem habet BC,



[a] Hyp.
[b] 33. hujus.
[c] 35. hujus.

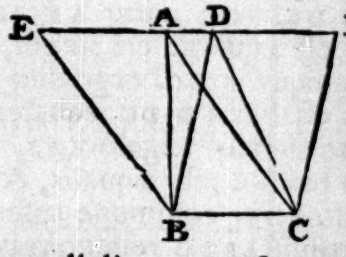
&

& in eiſdem parallelis BC, AD conſtituitur. ſimili ratione, & EFGH parallelogrammum eidem parallelogrammo EBCH eſt æquale. ergo parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale erit. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

Triangula ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt.

Sint triangula ABC, DBC ſuper eadem baſi BC, & in eiſdem parallelis AD BC conſtituta. Dico ABC triangulum triangulo DBC æquale eſſe. Producatur AD ex utraque parte in E, F puncta: & per B quidem ipſi CA parallela ducatur BE,

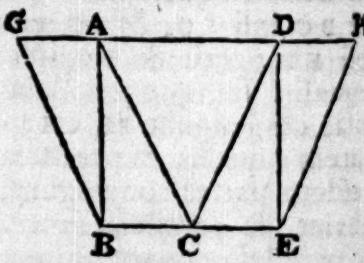


[a] 31. hujus. [a] per C vero ipſi BD parallela CF. parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum EBCA DBCF, & parallelogrammum [c] 35. hujus. EBCA eſt æquale [c] parallelogrammo DBCF, etenim ſuper eadem ſunt baſi BC, & in eiſdem parellelis BC EF: eſtque pa- [b] 34. hujus. rallelogrammi quidem EBCA dimidium [b] ABC triangulum, cum diameter AB ipſum bifariam ſecet: parallelogrammi vero DBCF dimidium [b] triangulum DBC; diameter enim DC [c] Axiom. 7. ipſum bifariam ſecat. quæ autem [c] æqualium dimidia ſunt inter ſe æqualia ſunt. ergo triangulum ABC triangulo DBC eſt æquale. Triangula igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangula ſuper baſibus æqualibus, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia.

Sint triangula ABC DCE ſuper æqualibus baſibus, BC CE & in eiſdem parallelis BE AD conſtituta. Dico ABC triangulum DCE triangulo æquale eſſe. Producatur enim AD ex utraque parte in G, H puncta: & per B quidem ipſi CA parallela ducatur BG [a]: per E vero duca- [a] 31. hujus. tur EH parallela ipſi DC [a]. parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum GBCA DCEH.



atque

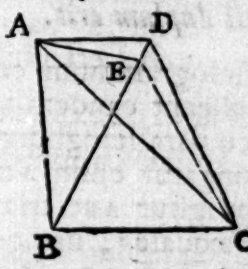
atque eſt parallelogrammum GBCA æquale [b] parallelogrammo DCEH: in æqualibus enim ſunt baſibus BC CE, & in eiſdem BE GH parallelis. parallelogrammi vero GBCA dimidium [c] eſt ABC triangulum, nam diameter AB ipſum bifariam ſecat. & parallelogrammi DCEH dimidium [c] eſt triangulum DCE, diameter enim DE ipſum ſecat bifariam. quæ autem æqualium dimidia ſunt [d], inter ſe æqualia ſunt. ergo ABC triangulum triangulo DCE eſt æquale. Triangula igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat.

[b] 36. hujus.
[c] 34. hujus.
[d] Axiom. 7.

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem quoque ſunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC DBC ſuper eadem baſi BC conſtituta, & ad eaſdem partes. Dico, & in eiſdem parallelis eſſe. Ducatur enim AD. Dico AD parallelam eſſe ipſi BC. Si enim non eſt parallela, ducatur [a] per A punctum ipſi BC parallela recta linea AE, & EC ducatur. æquale igitur eſt ABC triangulum triangulo EBC [b], ſuper eadem enim eſt baſi BC, & in eiſdem BC, AE parallelis. ſed ABC triangulum triangulo DBC [c] eſt æquale. ergo & triangulum DBC æquale eſt ipſi EBC triangulo, majus minori, quod fieri non poteſt. non igitur AE ipſi BC parallela eſt. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam parallelam eſſe, præter ipſam AD, ergo AD ipſi eſt parallela. Triangula igitur æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta in eiſdem quoque ſunt parallelis. Quod oportebat demonſtrare.



[a] 31. hujus.
[b] 37. hujus.
[c] Ex hyp.

PROP. XL. THEOR.

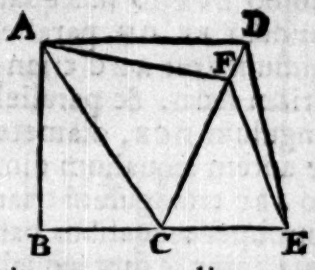
Triangula æqualia ſuper baſibus æqualibus, & ad eaſdem partes conſtituta in eiſdem quoque ſunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC CDE ſuper æqualibus baſibus BC CE conſtituta. Dico etiam in eiſdem eſſe parallelis. Ducatur enim AD. Dico AD ipſi BE parallelam eſſe. Nam ſi non eſt, ducatur per A ipſi BE parallela AF, [a] & FE ducatur.

[a] 31. hujus.

catur. triangulum igitur ABC triangulo FCE eſt æquale[b], cum ſuper æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis BE AF conſtituantur. ſed triangulum ABC æquale eſt triangulo DCE. ergo & triangulum DCE triangulo FCE æquale erit, majus minori, quod fieri non poteſt. non igitur AF ipſi BE eſt parallela. ſimiliter demonſtrabimus neque aliam quampiam parallelam eſſe, præter AD. ergo AD ipſi BE parallela erit. Æqualia igitur triangula ſuper baſibus æqualibus, & ad eaſdem partes conſtituta, etiam in eiſdem ſunt parallelis. Quod demonſtrare oportebat.

[b] 38. hujus.



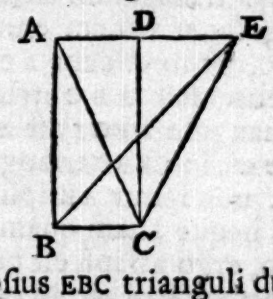
PROP. XLI. THEOR.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem baſim habeant in eiſdemque ſint parallelis; parallelogrammum ipſius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim ABCD, & triangulum EBC, baſim habeant eandem BC, & in eiſdem ſint parallelis BC AE. Dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum eſſe. Jungatur enim AC. triangulum igitur ABC triangulo EBC eſt æquale[a]; namque ſuper eadem baſi BC, & in eiſdem BC AE parallelis conſtituuntur. ſed ABCD parallelogrammum duplum eſt trianguli ABC[b], cum diameter AC ipſum bifariam ſecet. quare & ipſius EBC trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, & triangulum eandem baſim habeant, & in eiſdem ſint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli. Quod demonſtrare oportebat.

[a] 37. hujus.

[b] 34. hujus.



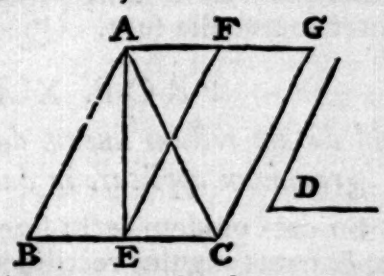
PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. Itaque oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrammum conſtituere in angulo rectilineo ipſi D æquali.

Secetur

Secetur BC bifariam [a] in E, & juncta AE, ad rectam lineam EC, atque ad punctum in ea E, conſtituatur angulus [b] CEF æqualis ipſi D: & per A quidem ipſi EC parallela ducatur [c] AG; per C vero ipſi FE ducatur parallela [c] CG. parallelogrammum igitur eſt FECG. & quoniam BE eſt æqualis EC,



[a] 10. hujus.
[b] 23. hujus.
[c] 31. hujus.

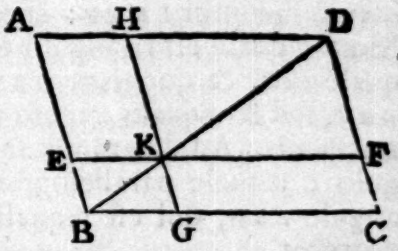
erit & ABE triangulum [d] triangulo AEC æquale, ſuper æqualibus enim ſunt baſibus BE EC, & in eiſdem BC AG parallelis. ergo triangulum AEC trianguli ABC eſt duplum. eſt autem, & parallelogrammum FECG duplum [e] trianguli AEC; baſim enim eandem habet, & in eiſdem eſt parallelis. æquale igitur eſt FECG parallelogrammum triangulo ABC habetque CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum FECG conſtitutum eſt, in angulo CEF, qui angulo D eſt æqualis. Quod quidem facere oportebat.

[d] 38. hujus.
[e] 41. hujus.

PROP. XLIII. THEOR.

Omnis parallelogrammi ſpatii, eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum complementa inter ſe ſunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter BD, & circa ipſam BD parallelogramma quidem ſint FH EG, quæ vero complementa dicuntur AK KC. Dico AK complementum complemento KC æquale eſſe. Quoniam enim parallelogrammum eſt ABCD, & ejus diameter BD, æquale [a] eſt ABD triangulum triangulo BDC. rurſus quoniam HKFD parallelogrammum eſt, cujus diameter DK, triangulum HDK triangulo DFK æquale [a] erit. eadem ratione, & triangulum KGB triangulo KEB eſt æquale. cum igitur triangulum quidem BEK æquale ſit triangulo BGK triangulum vero HDK ipſi DFK; erit triangulum BEK una cum triangulo HDK æquale triangulo BGK una cum DFK triangulo. eſt autem & totum triangulum ABD æquale toti BDC. reliquum igitur AK complementum reliquo complemento KC eſt æquale. Ergo omnis parallelogrammi ſpatii, eorum, quæ



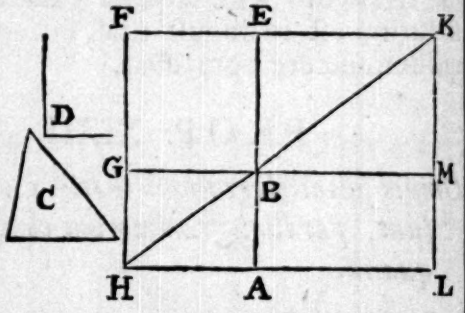
[a] 34. hujus.

circa diametrum ſunt, parallelogrammorum complementa inter ſe æqualia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XLIV. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea AB; datum vero triangulum C, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur ad datam rectam lineam, AB dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipſi D æquali. Conſtituatur trian-
a 42 hujus. gulo C æquale *a* parallelogrammum BEFG, in angulo EBG qui eſt æqualis D. & ponatur BE in directum ipſi AB, producaturque FG ad H: & per A alterutri ipſarum BG EF
b 31. hujus. parallela *b* ducatur AH, & HB jungatur. Quoniam igitur in parallelas AH EF recta linea HF incidit, anguli AHF HFE
c 29. hujus. duobus rectis æquales *c* ſunt. quare BHF HFE duobus rectis ſunt minores. quæ vero à minoribus, quam ſunt duo recti, in infinitum producuntur, conveniunt *d* inter ſe. ergo HB FE productæ convenient. producantur, & convenient in K; perque K alterutri ipſarum EA FH parallela *b* ducatur KL, & AH GB ad L, M puncta producantur. parallelogrammum igitur eſt HLKF, cujus diameter HK, & circa HK parallelogramma quidem ſunt AG ME; ea vero quæ comple-
d Axio. 12.



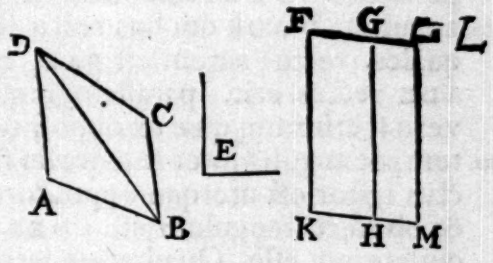
e 43. hujus. menta dicuntur LB BF: ergo LB ipſi BF eſt *e* æquale. ſed,
f 15. hujus. & BF æquale eſt triangulo C. quare, & LB triangulo C æquale erit. & quoniam GBE angulus æqualis *f* eſt angulo ABM, ſed & æqualis angulo D, erit & angulus ABM angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo C æquale parallelogrammum conſtitutum eſt LB, in angulo ABM, qui eſt æqualis angulo D. Quod facere oportebat.

PROP. XLV. PROBL.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum ABCD, datus vero angulus rectilineus E. Oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammum

mum conſtituere in angulo ipſi E æquali. Conjungantur enim DB, & conſtituatur triangulo ADB æquale [a] parallelogrammum FH: in angulo HKF, qui eſt æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale [b] parallelogrammum GM, in angulo GHM qui angulo E eſt æqualis. & quoniam angulus E æqualis eſt utrique ipſorum HKF GHM, erit & HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG, anguli igitur HKF KHG angulis KHG GHM æquales ſunt. ſed HKF KHG ſunt æquales [c] duobus rectis. ergo, & KHG GHM duobus rectis æquales erunt. itaque ad aliquam rectam lineam GH, & ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad eaſdem partes poſitæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt; in directum igitur [d] eſt KH ipſi HM. & quoniam in parallelas KM FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG HGF æquales [e] ſunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL, angulis HGF HGL ſunt æquales. at anguli MHG HGL æquales [e] ſunt duobus rectis. quare & anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt; in directum [d] igitur eſt FG ipſi GL. & quoniam KF ipſi HG & æqualis eſt, & parallela, ſed & HG ipſi ML; erit KF [e] ipſi ML & æqualis, & parallela. ipſaſque conjungunt rectæ lineæ KM FL. ergo & KM FL æquales *f* & parallelæ ſunt. parallelogrammum igitur eſt KFLM. at cum triangulum quidem ABD æquale ſit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum conſtitutum eſt KFLM in angulo FKM, qui eſt æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.



[a] 42. hujus.
[b] 44. hujus.
[c] 29. hujus.
[d] 14. hujus.
[e] 30. hujus.
[f] 33. hujus.

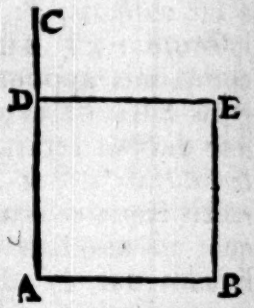
Cor. Ex jam dictis manifeſtum eſt, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari poſſit in dato angulo rectilineo.

PROP. XLVI. PROBL.

Super data recta linea quadratum deſcribere.

Sit data recta linea AB. Oportet ſuper ipſa AB quadratum

a 11. hujus. deſcribere. Ducatur a rectæ lineæ AB à puncto in ea dato
b 3. hujus. A ad rectos angulos AC; & ipſi AB æqualis b ponatur AD:
perque punctum D ducatur c DE ipſi AB parallela, & per B
c 33. hujus. ipſi AD parallela c ducatur BE. parallelogrammum igitur eſt
ADEB. & AB quidem eſt d æqualis DE,
d 34. hujus. AD vero ipſi d BE. ſed BA ipſi AD eſt
æqualis. quatuor igitur BA AD DE EB inter ſe æquales ſunt, ideoque æquilaterum eſt ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectangulum eſſe. Quoniam enim in parallelas AB DE recta linea AD,
e 29. hujus. anguli BAD ADE duobus rectis ſunt e æquales. rectus autem eſt BAD, ergo, & ADE rectus erit. parallelogrammorum vero ſpatiorum, quæ ex oppoſito ſunt la-
f 34. hujus. tera, & anguli f inter ſe æqualia ſunt. rectus igitur eſt uterque oppoſitorum ABE BED angulorum: & ob id rectangulum eſt ADEB. Oſtenſum autem eſt æquilaterum eſſe. Quadratum igitur ſit neceſſe eſt, atque eſt ſuper recta linea AB deſcriptum. Quod ipſum facere oportebat.

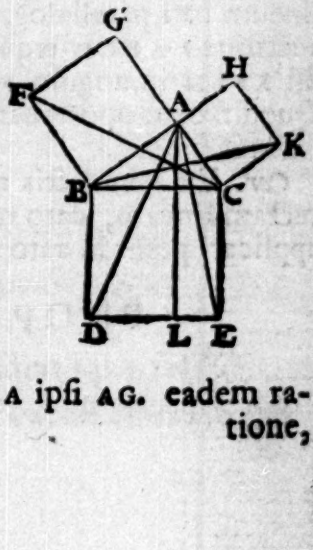


Cor. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum eſt rectangulum.

PROP. XLVII. THEOR.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur quadratum, æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum. Dico quadratum deſcriptum à recta BC æquale eſſe quadratis, quæ ab ipſis BA AC deſcribuntur. Deſcribatur a enim à BC quidem quadratum BDEC, ab ipſis
a 46. hujus. BA AC quadrata a GB HC, perque A alterutri ipſarum BD CE parallela ducatur AL; & AD FC jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum BAC
b Def. 30. BAG rectus b eſt, ad aliquam rectam lineam BA, & ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ AC AG non ad eaſdem partes poſitæ, angulos qui deinceps ſunt duobus rectis æquales
c 14. hujus. efficiunt; in directum igitur c eſt CA ipſi AG. eadem ratione,

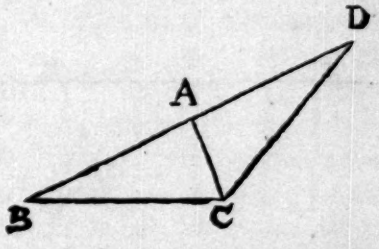


tione, & AB ipſi AH eſt in directum. & quoniam angulus DBC eſt æqualis angulo FBA, rectus enim uterque eſt, communis apponatur ABC, totus igitur DBA angulus toti FBC eſt *d* æqualis. quòd cum duæ AB BD duabus FB BC æqua- *d* Axiom. 2.
les *d* ſint, altera alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit & baſis AD baſi FC æqualis *e*, & ABD triangulum *e* 4. hujus.
triangulo FBC æquale. eſtque *f* trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum, baſim enim eandem habent BD, & in eiſdem BD AL ſunt parallelis: trianguli *f* verò *f* 41. hujus.
FBC duplum eſt GB quadratum, rurſus enim baſim habent eandem FB, & in eiſdem ſunt parallelis FB GC. quæ autem æqualium duplicia inter ſe æqualia *g* ſunt. ergo æquale eſt *g* Axiom. 6.
parallelogrammum BL ipſi GB quadrato. Similiter junctis AE BK, oſtendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC. totum igitur BDEC quadratum duobus quadratis GB HC eſt æquale. & deſcribitur quidem DBEC quadratum à recta linea BC, quadrata vero GB HC ab ipſis BA AC. quadratum igitur BE, à latere BC deſcriptum æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur à lateribus BA AC. Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod deſcribitur à latere rectum angulum ſubtendente, æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod deſcribitur ab uno laterum trianguli, æquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Si trianguli ABC, quod ab uno latere BC deſcribitur quadratum æquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus BA AC diſcribuntur, Dico angulum BAC rectum eſſe. Ducatur enim à puncto A ipſi AC ad rectos angulos AD; ponaturque AD ipſi BA æqualis, & DC jungatur. Quoniam igitur DA eſt æqualis AB, erit & quadratum quod deſcribitur ex DA æquale quadrato ex AB. commune apponatur quadratum, quod ex AC. ergo quadrata, quæ ex DA AC æqualia ſunt quadratis quæ ex BA AC deſcribuntur. ſed quadratis quidem, quæ ex DA AC æquale *a* eſt quod *a* 47. hujus.
ex DC quadratum; rectus enim angulus eſt DAC: quadratis



dratis vero, quæ ex BA AC æquale ponitur quadratum, quod ex BC: quadratum igitur, quod ex DC æquale eſt ei, quod ex BC quadrato. ergo & latus DC lateri CB eſt æquale. & quoniam DA eſt æqualis AB, communis autem AC, duæ DA AC æquales ſunt duabus BA AC; & baſis DC eſt æ-
6 8. hujus. qualis baſi CB: angulus *6* igitur DAC angulo BAC eſt æqualis. rectus autem eſt DAC. ergo & BAC rectus erit. Si igitur quadratum quod deſcribitur ab uno laterum trianguli, æquale ſit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonſtrare.

EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

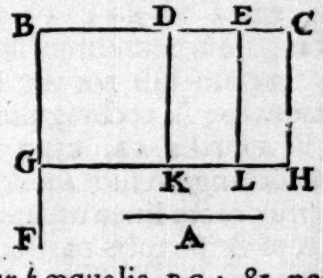
II.

Omnis parallelogrammi ſpatii, unumquodvis eorum quæ circa diametrum ipſius ſunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, gnomon vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcunque partes; rectangulum ſub duabus rectis lineis contentum æquale eſt eis rectangulis, quæ ſub recta linea inſecta, & ſingulis partibus continentur.

Sint duæ rectæ lineæ A, BC; & ſecta ſit BC utcunque in punctis D, E. Dico rectangulum rectis lineis A, BC contentum æquale eſſe rectangulo quod continetur ſub A & BD, & rectangulo quod ſub A & DE, & ei quod ſub A & EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipſi BC ad rectos [a] angulos BF: atque ipſi A ponatur [b] æqualis BG: & per G

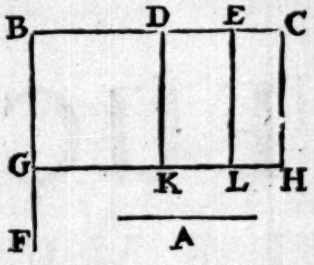


[a] 11. primi.
[b] 3. primi.

quidem ipſi BC parallela [c] ducatur GH: per D, E, C vero ducantur DK EL CH parallelæ [c] ipſi BG. rectangulum igitur BH eſt æquale rectangulis BK DL EH: atque eſt BH quidem quod ſub A & BC continetur; etenim continetur ſub GB BC; & BG ipſi A eſt æqualis; rectangulum autem BK eſt quod continetur ſub ipſis A & BD; continetur enim ſub GB BD, quarum GB eſt æqualis A; & rectangulum DL eſt quod continetur ſub A & DE, quoniam DK, hoc eſt [d] BG ipſi A eſt æqualis; & ſimiliter rectangulum EH eſt quod ſub A & EC continetur. ergo rectangulum contentum ſub A & BC eſt æquale rectangulo contento ſub A & BD, & contento ſub A & DE, & adhuc contento ſub A & EC. Si igitur ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcunque partes; rectangulum ſub duabus rectis lineis contentum eſt æquale eis, quæ ſub recta linea inſecta, & ſingulis partibus, continentur. Quod oportebat demonſtrare.

[c] 31. primi.

[d] 34. primi.



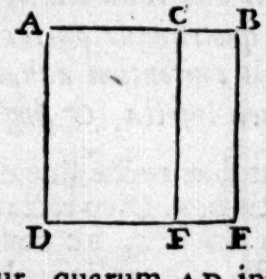
PROP. II. THEOR.

Si recta linea ſecta fuerit utcunque; rectangula quæ ſub tota, & ſingulis partibus continentur, æqualia ſunt ei quod à tota fit quadrato.

Recta enim linea AB ſecta ſit utcunque in puncto C, Dico rectangulum quod ſub AB BC continetur, unà cum contento ſub AB AC æquale eſſe quadrato, quod fit ex AB. Deſcribatur [a] enim ex AB quadratum ADEB, & per C ducatur [b] alterutri ipſarum AD BE parallela CF. æquale igitur eſt AE rectangulis AF CE. atque eſt AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum ſub BA AC; etenim ſub DA AC continetur, quarum AD ipſi AB eſt æqualis; & rectangulum CE continetur ſub AB BC, cum BE ſit æqualis AB. ergo rectangulum ſub AB & AC unà cum rectangulo ſub AB & BC æquale eſt quadrato ex AB. Si igitur recta linea utcunque ſecta fuerit, rectangula, quæ ſub tota & ſingulis partibus continentur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit quadrato. Quod demonſtrare oportebat.

[a] 46. primi.

[b] 31. primi.

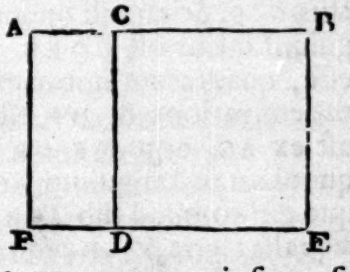


PROP.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est & rectangulo, quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C. Dico sub AB & BC rectangulum æquale esse rectangulo sub AC BC unà cum quadrato, quod fit ex BC. Describatur [a] enim ex BC quadratum CDEB; producaturque ED in F: & per A alterutri ipsarum CD BE parallela [b] ducatur AF. æquale utique erit rectangulum AE ipsis AD CE: & est AE quidem rectangulum contentum sub AB BC; etenim sub AB BE continetur, quarum BE est æqualis BC: rectangulum vero AD est quod continetur sub AC CB, cum DC ipsi CB sit æqualis; & DB est quadratum, quod fit ex BC. ergo rectangulum sub AB BC est æquale rectangulo sub AC CB unà cum quadrato quod ex BC. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est rectangulo, quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.



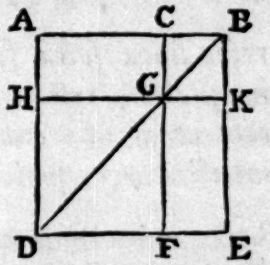
[a] 46. primi.

[b] 31. primi.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcunque; quadratum quod fit à tota æquale erit, & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei quod bis sub partibus continetur rectangulo.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C. Dico quadratum quod fit ex AB æquale esse, & quadratis ex AC CB & ei rectangulo quod bis sub AC CB continetur. Describatur [a] enim ex AB quadratum ADEB, jungaturque BD, & per C quidem alterutri ipsarum AD BE parallela [b] ducatur CGF; per G vero alterutri ipsarum AB DE ducatur [b] parallela HK. & quoniam CF est parallela ipsi AD, & in ipsas incidit BD: erit exterior angulus BGC interiori & oppositio ADB æqualis [c]: angulus

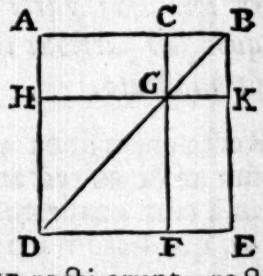


[a] 46. primi.

[b] 41. primi.

[c] 29. primi.

d 5. primi. angulus autem ADB eſt æqualis d angulo ABD, quod & latus BA æquale eſt lateri AD. quare CGB angulus angulo
e 6. primi. GBC eſt æqualis: ac propterea latus BC lateri CG æquale e.
f 34. primi. ſed & latus CB æquale f eſt lateri GK & CG ipſi BK. ergo & GK eſt æquale KB, & CGKB æquilaterum eſt. Dico inſuper etiam rectangulum eſſe. Quoniam enim CG eſt parallela ipſi BK & in ipſas incidit CB; anguli KBC GCB duobus rectis ſunt æquales e. rectus autem eſt KBC angulus. ergo & rectus GCB, & anguli oppoſiti CGK GKB recti erunt. rectangulum igitur eſt CGKB. ſed oſtenſum fuit & æquilaterum eſſe, quadratum igitur eſt CGKB, quod quidem fit ex BC. eadem ratione & HF eſt quadratum quod fit ex HG, hoc eſt ex AC. ergo HF CK ex ipſis AC CB quadrata ſunt. &
g 43. primi. quoniam rectangulum AG eſt æquale g rectangulo GE; atque eſt AG quod ſub AC CB continetur, eſt enim GC ipſi CB æqualis: erit & GE æquale ei quod continetur ſub AC CB, quare rectangula AG GE æqualia ſunt ei quod bis ſub AC CB continetur. ſunt autem & HF CK quadrata ex AC CB. quatuor igitur HF CK AG GE, & quadratis ex AC CB, & ei quod bis ſub AC CB continetur rectangulo, ſunt æqualia; ſed HF CK AG GE componunt totum ADEB quadratum quod fit ex AB. quadratum igitur ex AB æquale eſt & quadratis ex AC CB, & ei quod bis ſub AC CB continetur rectangulo. Quare ſi recta linea utcunque ſecta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale erit & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo quod bis ſub partibus continetur. Atque illud eſt quod demonſtrare oportebat.



Cor. Ex hoc perſpicue conſtat, in quadratis ſpatiis parallelogramma quæ ſunt circa diametrum, quadrata eſſe.

PROP. V. THEOR.

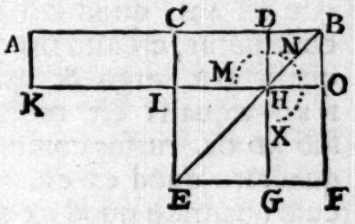
Si recta linea ſecta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum ſub inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ quæ inter ſectiones interjicitur, æquale eſt ei quod à dimidia fit quadrato.

Recta enim linea quævis AB ſecta ſit in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum ſub AD BD, unà cum quadrato quod fit ex

CD

Sit $a = AC$, vel CB; $b = CD$ ∴ $a+b = AD$, $a-b = DB$
$(a+b)\times(a-b) = a^2 - b^2$
∴ $(a+b)(a-b)+b^2 = a^2$; i.e. $AD.DB + CD^2 = AC^2$ or CB^2

CD æquale eſſe ei quod ex CB fit quadrato. Deſcribatur enim ex BC quadratum CEFB: ducaturque BE: & per D quidem alterutri ipſarum CE BF parallela ducatur DHG; per H vero ducatur KLO parallela alterutri ipſarum CB EF: & rurſus per A ducatur alterutri CL BO parallela AK. & quoniam CH complementum æquale eſt complemento HF, commune apponatur DO, totum igitur CO toti DF eſt æquale. ſed CO eſt æquale AL, quoniam & AC ipſi CB. ergo & AL æquale eſt DF. commune apponatur CH. totum igitur AH ipſis FD DL æquale erit. ſed AH quidem eſt quod ſub AD DB continetur, etenim DH ipſi DB eſt æqualis; FD DL vero eſt gnomon MNX. igitur MNX æqualis eſt ei quod ſub AD DB continetur, commune apponatur LG, æquale ſcilicet quadrato quod ex CD, ergo MNX gnomon, & LG æqualia ſunt rectangulo, quod continetur ſub AD DB, & ei, quod fit ex CD quadrato. ſed MNX gnomon, & LG ſunt totum quadratum CEFB, quod quidem fit ex CB. ergo rectangulum ſub AD DB, una cum quadrato quod ex CD, æquale eſt ei quod ex CB fit quadrato. Si igitur recta linea ſecta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum ſub inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ quæ inter ſectiones interjicitur, æquale eſt ei quod à dimidia fit quadrato. Quod demonſtrare oportebat.



a 46. primi.
b 31. primi.
c 43. primi.
d 36. primi.
e Cor. 4. hujus.

PROP. VI. THEOR.

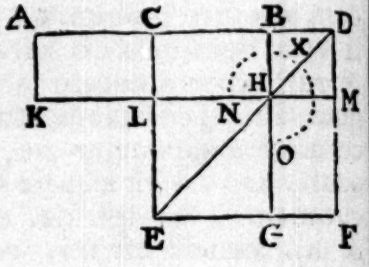
Si recta linea bifariam ſecetur, atque ipſi in directum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum ſub tota cum adjecta, & adjecta contentum, unà cum quadrato dimidiæ, æquale eſt quadrato quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta conſtat, tanquam ab una linea, deſcribitur.

Recta enim linea quævis AB ſecetur bifariam in puncto C, & adjiciatur ipſi in directum BD. Dico rectangulum ſub AD DB unà cum quadrato ex BC æquale eſſe ei quod fit ex CD quadrato. Deſcribatur enim ex CD quadratum CEFD, & jungatur DE; per B alterutri ipſarum CE DF parallela ducatur BHG; & per H ducatur KLM parallela alterutri ipſarum AD EF; & adhuc per A alterutri CL DM pa-

a 46. primi.
b b 31. primi.

parallela [b] AK. Itaque quoniam AC eſt æqualis CB, erit & rectangulum AL rectangulo CH æquale [c]. ſed CH æquale [d] eſt HF. ergo & AL ipſi HF æquale erit. commune apponatur CM. totum igitur AM gnomoni NXO eſt æquale. atque eſt AM, quod ſub AD DB continetur, etenim DM eſt [e] æqualis DB. ergo & gnomon NXO æqualis eſt rectangulo ſub AD DB. rurſus commune apponatur LG, æquale [e] ſcilicet quadrato quod ex CB. rectangulum igitur ſub AD DB unà cum quadrato quod ex BC æquale eſt gnomoni NXO & ipſi LG. ſed gnomon NXO, & LG componunt CEFD quadratum, quod quidem fit ex CD. ergo rectangulum ſub AD DB unà cum quadrato ex BC æquale eſt ei, quod fit ex CD quadrato. Si igitur recta linea ſecetur bifariam, adjiciaturque ipſi in directum quædam recta linea; rectangulum ſub tota cum adjecta, & adjecta contentum, unà cum quadrato dimidiæ, æquale eſt quadrato quod ab ea, quæ ex dimidia & adjecta conſtat, tanquam ab una linea, deſcribitur. Quod oportebat demonſtrare.

c 36. primi.
d 43 primi.
e Cor. 4. hujus.

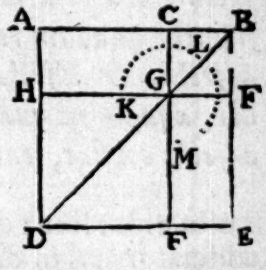


PROP. VII. THEOR.

Si recta linea utcunque ſecta fuerit; quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia ſunt, & rectangulo, quod bis ſub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam AB ſecta ſit utcunque in puncto C. Dico quadrata ex AB BC æqualia eſſe, & rectangulo quod bis ſub AB BC continetur, & ei quod fit ex AC quadrato. Deſcribatur [a] enim ex AB quadratum ADEB, & figura conſtruatur *. Itaque quoniam AG rectangulum æquale [b] eſt rectangulo

a 46. primi.
b 43. primi.



* *Figura dicitur conſtrui, cum in parallelogrammo ductæ lineæ lateribus parallelæ ſecantes diametrum in uno puncto, efficiunt duo parallelogramma circa diametrum, & duo complementa. Similiter dupla figura dicitur conſtrui, cum ductæ rectæ lateribus parallelæ, efficiunt quatuor parallelogramma circa diametrum, & quatuor complementa.*

GE.

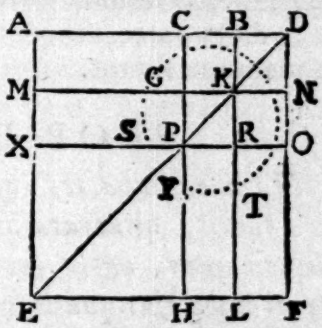
GE, commune apponatur CF; quare totum AF toti CE eſt æquale. rectangula igitur AF CE dupla ſunt rectanguli AF. ſed AF CE ſunt KLM gnomon, & quadratum CF; ergo KLM gnomon, & quadratum CF dupla erunt rectanguli AF. eſt autem id, quod bis ſub AB BC continetur, duplum ipſius AF; etenim BF eſt [c] æqualis BC. gnomon igitur KLM, & quadratum CF æqualia ſunt ei quod bis ſub AB BC continetur. commune apponatur HF, quod eſt ex AC quadratum. ergo gnomon KLM, & quadrata CF HF æqualia ſunt ei quod bis ſub AB BC continetur, & quadrato ex AC. ſed gnomon KLM, & quadrata CF HF componunt ADEB, & CF, quæ ſunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC æqualia ſunt rectangulo, quod bis ſub AB BC continetur unâ cum eo quod fit eſt AC quadrato. Ergo ſi recta linea utcunque ſecta fuerit; quæ à tota, & una parte ſiunt utraque quadrata, æqualia ſunt rectangulo quod bis ſub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reilqua parte fit quadrato. Quod oſtendere oportebat.

[c] Cor. 4. hujus.

PROP. VIII. THEOR.

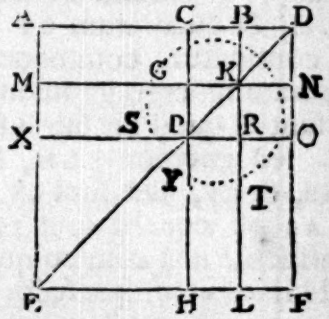
Si recta linea utcunque ſecta fuerit; quod quater ſub tota, & una parte continetur rectangulum unà cum quadrato reliquæ partis, æquale eſt quadrato quod ex tota, & dicta parte tanquam ex una linea, deſcribitur.

Recta enim linea AB ſecta ſit utcunque in C. Dico rectangulum quater ſub AB BC contentum unà cum quadrato quod ex AC æquale eſſe quadrato, quod ex AB BC tanquam ex una linea deſcribitur. Producatur enim recta linea AB in D; & ipſi CB ponatur æqualis BD; deſcribaturque ex AD quadratum AE FD; & dupla figura conſtruatur. quoniam igitur CB eſt [a] æqualis BD, atque eſt CB ipſi GK æqualis [b]; BD vero ipſi KN: erit & GK æqualis KN. eadem ratione, & PR ipſi RO eſt æqualis. & quoniam CB eſt æqualis BD, & GK ipſi KN; erit rectangulum [c] quidem CK rectangulo BN; rectangulum vero GR ipſi RN æquale [c]. ſed CK eſt [d] æquale RN, complementa enim ſunt parallelogrammi CO, ergo & BN æquale eſt GR, & quatuor rectan-



[a] hyp.
[b] 34. primi.
[c] 36. primi.
[d] 43. primi.

rectangula BN KC GR RN inter ſe æqualia; ideoque quadrupla ſunt rectanguli CK. rurſus quoniam CB eſt æqualis BD, & BD quidem ipſi BK, hoc eſt ipſi CG æqualis; CB vero ipſi GK, hoc eſt GP: erit & CG æqualis GP. eſt autem & PR ipſi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, & rectangulum PL ipſi RF æquale erit. ſed MP [d] eſt æquale PL, complementa enim ſunt ML parallelogrammi; quare & AG ipſi RF eſt æquale. quatuor igitur AG MP PL RF inter ſe æqualia ſunt, ac propterea ipſius AG quadrupla. oſtenſum autem eſt, & quatuor CK BN GR RN quadrupla eſſe CK. quare octo continentia gnomonem STY ipſius AK quadrupla ſunt, & quoniam AK eſt quod ſub AB BC continetur; etenim BK eſt æqualis BC; erit contentum quater ſub AB BC ipſius AK quadruplum. at demonſtratus eſt gnomon STY quadruplus ipſius AK. quod igitur quater ſub AB BC continetur æquale eſt gnomoni STY. commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC eſt [e] æquale. ergo quod quater ſub AB BC continetur una cum quadrato ex AC æquale eſt ipſi STY gnomoni, & quadrato XH. ſed STY gnomon, & XH totum ſunt AEFD quadratum, quod deſcribitur ex AD. rectangulum igitur quater ſub AB BC contentum unà cum quadrato ex AC æquale eſt ei, quod ex AD, hoc eſt ex AB BC tanquam ex una linea deſcribitur, quadrato. Ergo ſi recta linea utcunque ſecta fuerit; quod quater ſub toto, & una parte continetur rectangulum, unà cum quadrato reliquæ partis, æquale eſt quadrato, quod ex tota & dicta parte, tanquam ex una linea deſcribitur. Quod oſtendendum fuerat.



[d] 43. primi.

[e] Cor. 4. hujus.

PROP. IX. THEOR.

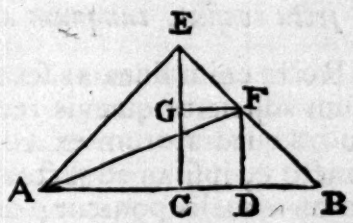
Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales ſecta fuerit; quadrata quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur, dupla ſunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter ſectiones interjicitur.

Recta enim linea quævis AB ſecta ſit in partes æquales ad C, & in partes inæquales ad D. Dico quadrata ex AD DB, quadratorum ex AC CD dupla eſſe. Ducatur [a] enim à puncto C ipſi AB ad rectos angulos CE, & utrivis ipſarum

[a] 11. primi.

AÇ

AC CB æqualis ponatur, junganturque EA EB. ac per D quidem ipſi CE parallela [b] ducatur DF; per F vero ipſi AB parallela [b] FG; & AF ducatur. Itaque quoniam AC eſt æqualis CE; erit [c] & angulus EAC angulo AEC æqualis. & cum rectus ſit angulus ad C, reliqui AEC EAC uni recto æquales [d] erunt. & ſunt æquales inter ſeſe. utervis igitur ipſorum AEC EAC recti eſt dimidium. eadem ratione, & recti dimidium eſt utervis ipſorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus eſt. & quoniam angulus GEF dimidium eſt recti, rectus autem EGF, æqualis enim [e] eſt interiori & oppoſito ECB, erit, & reliquus EFG recti dimidium: æqualis igitur eſt GEF angulus ipſi EFG. quare & latus EG lateri GF eſt [f] æquale. rurſus quoniam angulus ad B dimidium eſt recti, rectus autem FDB, quòd ſit æqualis interiori & oppoſito ECB; reliquus BFD recti erit dimidium. angulus igitur ad B æqualis eſt angulo BFD; ideoque latus DF lateri DB æquale. & quoniam AC eſt æqualis CE, erit & ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla ſunt quadrati ex AC; quadratis autem ex AC CE æquale [g] eſt quadratum ex EA, ſiquidem rectus eſt angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniam EG æqualis eſt GF, & quadratum ex EG quadrato ex GF eſt æquale. quadrata igitur ex EG & GF dupla ſunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale [g] eſt quod ex EF quadratum. ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. æqualis [h] autem eſt GF ipſi CD. quadratum igitur ex EF duplum eſt quadrati CD. ſed & quadratum ex AE quadrati ex AC eſt duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla ſunt quadratorum ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale [g] eſt ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus eſt. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD eſt duplum. ſed quadrato ex AF æqualia ſunt ex AD DF quadrata. rectus enim eſt angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla ſunt quadratorum ex AC CD. eſt autem DF ipſi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare ſi recta linea in partes æquales, & in partes inæquales, ſecta fuerit; quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur quadrata, dupla ſunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter ſectiones interjicitur. Quod oſtendere oportebat.



[b] 31. primi
[c] 5. primi.
[d] 3. Cor. 32. primi.
[e] 29. primi.
[f] 6. primi.
[g] 47. primi.
[h] 34. primi.

PROP.

PROP. X. THEOR.

Si recta linea ſecetur bifariam, & ipſi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta ſiunt utraque quadrata, dupla ſunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta conſtat, tanquam ab una linea, deſcribitur.

Recta enim linea AB ſecetur bifariam in C, & ipſi in directum adjiciatur quævis recta linea BD. Dico quadrata ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla eſſe. Ducatur enim à
a 11. primi. puncto C, ipſi AB ad rectos a angulos CE, & utrivis ipſarum AC CB æqualis ponatur; ducaturque AE EB, & per E qui-
b 31. primi. dem ipſi AD parallela b ducatur EF; per D vero ducatur DF parallela b ipſi CE. & quoniam in parallelas EC FD recta
c 29. primi. quædam linea EF incidit, anguli CEF EFD æquales c ſunt duobus rectis. anguli igitur FEB EFD duobus rectis ſunt minores. quæ autem à minoribus quam ſunt duo recti in infinitum producuntur, con-
d Axio. 12. veniunt inter ſe d. ergo EB FD productæ ad partes BD convenient. prodncantur, & conveniant in puncto G, & AG ducatur. itaque quoniam AC eſt æqualis CE, & angulus AEC angulo EAC æqualis
e 5. primi. e erit: atque eſt rectus qui ad C. uterque igitur ipſorum CAE AEC eſt recti dimidium. eadem ratione, & recti dimidium eſt uterque CEB EBC. ergo AEB eſt rectus. &
f 15. primi. quoniam EBC eſt dimidium recti, erit & recti f dimidium DBG; cum ſit ad verticem. ſed & BDG rectus eſt; etenim eſt c æqualis ipſi DCE alterno. reliquus igitur DGB dimidium eſt recti, & ob id ipſi DBG æqualis. ergo & latus BD
g 6. primi. æquale g lateri DG. rurſus quoniam EGF eſt dimidium recti, rectus autem qui ad F, eſt enim angulo oppoſito qui ad C æqualis; erit, & reliquus FEG recti dimidium, & æqualis ipſi EGF. quare & latus GF lateri EF eſt æquale g. & cum EC ſit æqualis CA; & quadratum ex EC æquale eſt ei quod ex CA fit quadrato. ergo quadrata ex EC CA dupla
h 47. primi. ſunt quadrati ex CA. quadratis autem ex EC CA æquale h eſt quadratum ex EA. quadratum igitur ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniam GF eſt æqualis FE, æquale eſt, & ex GF quadratum quadrato ex FE. quadrata igitur ex GF FE quadrati ex EF ſunt dupla. at quadratis ex GF FE æquale

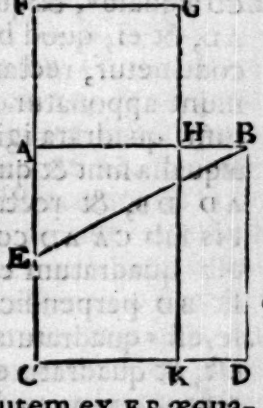
eſt

eſt [b] quod ex EG quadratum. ergo quadratum ex EG duplum eſt quadrati ex EF. æqualis autem eſt EF ipſi CD. quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. ſed oſtenſum eſt quadratum ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex AE EG quadrata, quadratorum ex AC CD ſunt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale eſt [b] quod ex AG qua- [b] 47.primi.
dratum. quadratum igitur ex AG duplum eſt quadratorum ex AC CD. at quadrato ex AG æqualia [b] ſunt ex AD DG quadrata. ergo quadrata ex AD DG ſunt dupla quadratorum ex AC CD. ſed DG eſt æqualis DB. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD ſunt dupla. Ergo ſi recta linea bifariam ſecetur, & ipſi in directum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata, dupla ſunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea quæ ex dimidia & adjecta conſtat tanquam ab una linea deſcribitur. Quod oſtendere oportebat.

PROP. XI. PROBL.

Datam rectam lineam ſecare, ita ut quod ſub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale ſit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.

Sit data recta linea AB. Oportet ipſam AB ita ſecare, ut quod ſub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale ſit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Deſcribatur [a] enim [a] 46.primi.
ex AB quadratum ABGD, ſeceturque AC bifariam in E, & BE ducatur: deinde producta CA in F, ponatur ipſi BE æqualis EF: deſcribaturque ex AF quadratum FGHA, & GH ad K producatur. Dico AB ſectam eſſe in H, ita ut ſub AB BH rectangulum æquale ſit quadrato ex AH. Quoniam enim recta linea AC bifariam ſecatur in E, adjicitur que ipſi in directum AF, rectangulum ſub CF FA, una cum quadrato ex AE, æquale [b] erit quadrato ex EF. ſed EF eſt [b] 6. hujus.
æqualis EB. rectangulum igitur ſub CF FA, una cum quadrato ex AE æquale eſt ei, quod fit ex EB, quadrato. quadrato autem ex EB æqualia ſunt [c] quadrata ex BA AE: etenim angulus ad A rectus eſt. [c] 47.primi.
ergo rectangulum ſub CF FA, una cum quadrato ex AE æquale eſt quadratis ex AB AE; commune auferatur quod ex AE fit quadratum; reliquum igitur rectangulum ſub CF FA æquale eſt quadrato ex AB. eſt autem rectangulum FK ſub

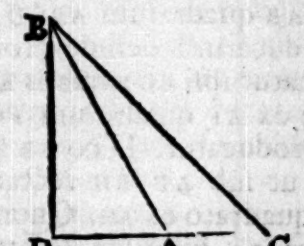


CF FA; ſiquidem AF eſt æqualis FG; quadratum autem ex AB eſt ipſum AD. rectangulum igitur FK æquale eſt quadrato AD. commune auferatur AK. ergo reliquum FH reliquo HD eſt æquale. atque eſt HD rectangulum ſub AB BH, cum AB ſit æqualis BD, & FH eſt quadratum ex AH. rectangulum igitur ſub AB BH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB ſecta eſt in H, ita ut ſub AB BH rectangulum quadrato ex AH ſit æquale. Quod facere oportebat.

PROP. XII. THEOR.

In obtuſangulis triangulis, quod à latere obtuſum angulum ſubtendente fit quadratum, majus eſt quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod ſcilicet protractum perpendicularis cadit, & linea aſſumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtuſum.

Sit obtuſangulum triangulum ABC, obtuſum angulum habens BAC: & ducatur [a] à puncto B ad CA protractum perpendicularis BD. Dico quadratum ex BC majus eſſe, quam quadrata ex BA AC, rectangulo quod bis ſub CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD ſecta eſt utcunque in puncto A, erit quadratum ex CD æquale [b], & quadratis ex CA AD, & ei, quod bis ſub CA AD continetur, rectangulo. commune apponatur ex DB quadratum. quadrata igitur ex CD DB æqualia ſunt & quadratis ex CA AD DB, & rectangulo quod bis ſub CA AD continetur. ſed quadratis ex CD DB æquale eſt [c] quadratum ex CB, rectus enim eſt angulus ad D, cum ſit BD perpendicularis. quadratis vero ex AD DB æquale eſt [c] quadratum ex AB. Quadratum igitur ex CB æquale eſt, & quadratis ex CA AB, & rectangulo bis ſub CA AD contento. ergo quadratum ex CB majus eſt quam quadrata ex CA AB, rectangulo, quod bis ſub CA AD continetur. In obtuſangulis igitur triangulis, quadratum, quod fit à latere obtuſum angulum ſubtendente, majus eſt quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum, quæ ſunt circa obtuſum



[a] 12 primi.

[b] 4. hujus.

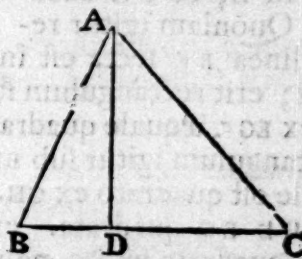
[c] 47. primi.

ſum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, & linea aſſumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtuſum. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum ſubtendente fit quadratum, minus eſt quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutum.

Sit acutangulum triangulum ABC, acutum habens angulum ad B: ducatur à puncto A [a] ad BC perpendicularis AD. [a] 12. primi. Dico quadratum quod fit ex AC minus eſſe quam quadrata quæ ex CB BA fiunt, rectangulo quod bis ſub CB BD continetur. Quoniam enim recta linea CB ſecta eſt utcunque in D, erunt quadrata ex CB BD æqualia [b], & rectangulo quod bis ſub CB BD continetur, & quadrato ex DC. commune apponatur ex AD quadratum. quadrata igitur ex CB BD DA æqualia ſunt, & rectangulo bis ſub CB BD contento, & quadratis ex AD DC. ſed quadratis ex BD DA æquale eſt [c] ex AB quadratum; rectus enim angulus eſt qui ad D. quadratis vero ex AD DC æquale [c] eſt quadratum ex AC, quadrata igitur ex CB BA ſunt æqualia quadrato ex AC, & ei quod bis ſub CB BD continetur rectangulo. quare ſolum quadratum ex AC minus eſt quam quadrata ex CB BA, rectangulo quod bis ſub CB BD continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum quod à latere acutum angulum ſubtendente fit, minus eſt quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutum. Quod demonſtrare oportebat.



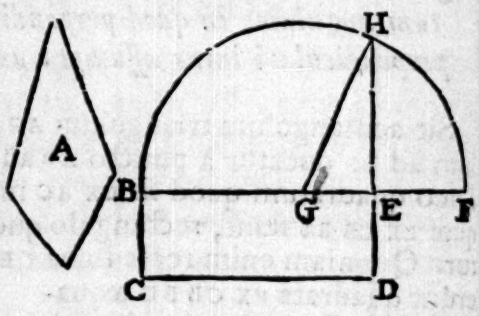
[b] 7. hujus.

[c] 47. primi.

PROP. XIV. PROBL.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.

Sit datum rectilineum A. Oportet ipſi A rectilineo æquale
[a] 45. primi. quadratum conſtituere. Conſtituatur [a] rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum BC DE. ſi igitur BE eſt æqualis ED, factum jam erit quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum conſtitutum eſt BD: ſin minus, una ipſarum BE ED major eſt. ſit BE major; & producatur ad F, ponaturque ipſi ED æqualis EF. deinde ſecta FB bi-
[b] 10. primi. fariam [b] in G: centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum GB GF ſemicirculus deſcribatur EHF; producaturque DE in H, & GH ducatur. Quoniam igitur recta linea BF ſecta eſt in partes æquales ad G, inæquales ad E; erit rectangulum ſub BE EF, una cum quadrato quod
[c] 5. hujus. fit ex EG [c], æquale quadrato ex GF. eſt autem GF æqualis GH. rectangulum igitur ſub BE EF una cum quadrato ex EG, æ-
[d] 47. primi. quale eſt quadrato ex GH. ſed quadrato ex GH æqualia [d] ſunt ex HE EG quadrata. ergo rectangulum ſub BE EF una cum quadrato ex EG æquale eſt quadratis ex HE EG. commune auferatur ex EG quadratum. reliquum igitur rectangulum ſub BE EF eſt æquale quadrato ex EH. ſed rectangulum ſub BE EF eſt ipſum BD parallelogrammum, quoniam EF eſt æqualis ED. ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH eſt æquale. parallelogrammum autem BD eſt æquale rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH deſcripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum conſtitutum eſt, quod videlicet ex ipſa EH deſcribitur. Quod facere oportebat.



EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

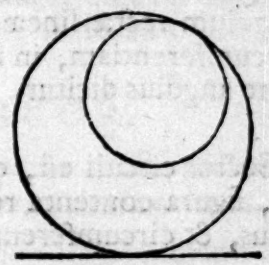
I.

ÆQUALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.

II

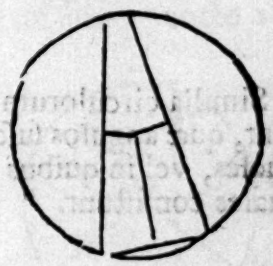
Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, & producta, ipſum non ſecat.

III.



Circuli contingere ſe dicuntur, qui contingentes, ſe ipſos non ſecant.

IV.



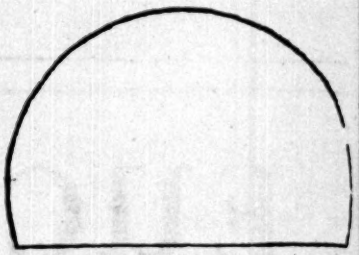
In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æquales.

V.

Magis autem diſtare à centro dicitur ea, in quam major perpendicularis cadit.

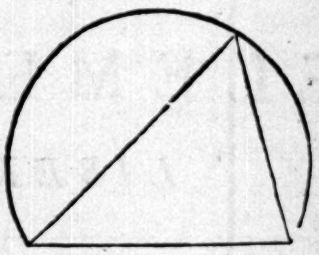
VI.

Segmentum circuli eſt figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



VII.

Segmenti autem angulus eſt, qui recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.



VIII.

In ſegmento angulus eſt, quando in circumferentia ſegmenti ſumatur aliquod punctum, atque ab ipſo ad terminos lineæ ejus, quæ baſis eſt ſegmenti, rectæ lineæ ducantur, angulus ductis lineis contentus.

IX.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ aſſumunt circumferentiam, in illa conſiſtere angulus dicitur.

X.

Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentia ab ipſis aſſumpta.

XI.

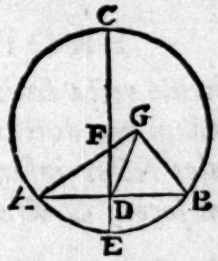
Similia circulorum ſegmenta ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſiſtunt.

PROP.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus ABC, oportet circuli ABC centrum invenire. Ducatur in ipso quædam recta linea AB utcunque, & in puncto D bifariam [a] secetur, à puncto autem D ipsi AB ad rectos angulos [b] ducta DC in E producatur; & secetur CE bifariam [a] in F. Dico punctum F circuli ABC centrum esse. Non enim; sed si fieri potest, sit G centrum, & GA GD GB ducantur. itaque quoniam DA est æqualis DB, communis autem DG, erunt duæ AD DG duabus GD DB æquales, altera alteri: & basis GA æqualis [c] est basi GB; sunt enim ex centro G. angulus igitur ADG angulo GDB est [d] æqualis cum autem recta linea super rectam lineam insistens, angulos qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, [e] rectus est uterque æqualium angulorum. ergo angulus GDB est rectus. sed & rectus FDB. æqualis igitur est angulus FDB angulo GDB, major minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli ABC centrum. similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F. ergo F centrum est circuli ABC. Quod invenire oportebat.



[a] 10. primi.

[c] Def. 15. primi.

[d] 8. primi.

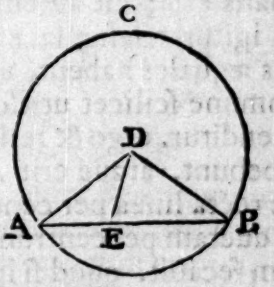
[e] Def. 10. primi.

Cor. Si in circulo quævis recta linea, lineam quandam bifariam & ad angulos rectos secet, in secante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR.

Si in circumferentia circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus ABC; in circumferentia ipsius sumantur duo quævis puncta A B. Dico rectam lineam quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. Sumatur enim in recta AB punctum quodvis E, & jungantur DA DE DB. Quoniam DA est æqualis DB, erit [a] angulus DAB æqualis angulo DBA, & quoniam trianguli DAE latus AE producitur, erit [b] angulus DEB angulo DAE major, angulus autem DAE æqualis est angulo DBE, ergo DEB angulus angulo DBE est



[a] 5. primi.

[b] 16. primi.

† et centrum inveniatur D=

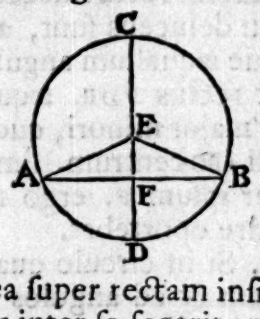
c 19. primi. eſt major. ſed majori c angulo majus latus ſubtenditur. major igitur eſt DB ipſa DE. ſed DB ad circumferentiam tantum pertingit. ergo DE non eo uſque protenditur. adeoque punctum E cadet intra circulum. Si igitur in circumferentia &c. Quod oportebat demonſtrare.

Cor. Hinc ſi recta circulum tangat, in unico puncto eum tangit.

PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit; quod ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, & bifariam ſecabit.

Sit circulus ABC, & in ipſo recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam ſecet in puncto F. Dico ad angulos rectos ipſam ſecare. Sumatur enim circuli



a 1. hujus. ABC centrum a quod ſit E, & EA EB jungantur. Quoniam igitur AF eſt æqualis FB, communis autem FE, duæ AF FE duabus BF FE æquales ſunt, & baſis EA baſi EB eſt æqualis. ergo & angulus AFE angulo BFE

b 8. primi. æqualis b erit. cum autem recta linea ſuper rectam inſiſtens

c Def. 10. primi. angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt c uterque æqualium angulorum. uterque igitur AFE BFE eſt rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam ſecans, & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Si vero CD ſecet AB ad rectos angulos, dico & bifariam ipſam ſecare, hoc eſt AF ipſi FB æqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, quoniam EA, quæ

d 5. primi. ex centro, eſt æqualis EB, & angulus EAF angulo d EBF æqualis erit; eſt autem & AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habent, unumque latus uni lateri æquale, EF commune ſcilicet utriſque, quod uni angulorum æqualium ſubtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia

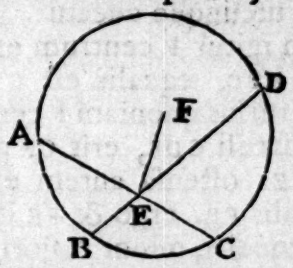
e 26. primi. e habebunt. atque erit AF ipſi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit. quod ſi ipſam ſecet ad rectos angulos, & bifariam ſecabit. Quod oportebat demonſtrare.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent non ductæ per centrum, ſeſe bifariam non ſecabunt.

Sit circulus ABCD; & in ipſo duæ rectæ lineæ AC BD ſe invicem ſecent in puncto E, non ductæ per centrum. Dico eas ſeſe bifariam non ſecare. Si enim fieri poteſt, ſecent ſeſe bifariam, ita ut AE ſit æqualis EC & BE ipſi ED: ſumaturque [a] centrum ABCD circuli, quod ſit F, & EF jungatur. Quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam ſecat, & ad rectos angulos ipſam ſecabit [b]. quare rectus eſt FEA angulus. rurſus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam ſecat, & ad angulos rectos ipſam [b] ſecabit. rectus igitur angulus eſt FEB. oſtenſus autem eſt rectus & FEA. ergo FEA angulus ipſi FEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur AC BD ſeſe bifariam ſecant. Quare ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent non ductæ per centrum, ſeſe bifariam non ſecabunt. Quod oſtendere oportebat.



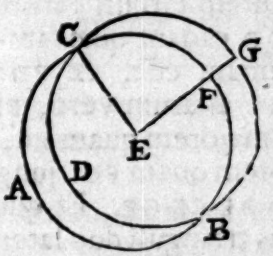
[a] 1. hujus.

[b] 3. hujus.

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum.

Duo enim circuli ſe invicem ſecent ABC CDG in punctis B, C. Dico ipſorum idem centrum non eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit centrum E; jungaturque EC, & EFG utcunque ducatur. Quoniam E centrum eſt circuli ABC, erit CE ipſi EF æqualis. rurſus quoniam E centrum eſt CDG circuli, æqualis eſt CE ipſi EG. ſed oſtenſa eſt CE æqualis EF. ergo EF ipſi EG æqualis erit, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur punctum E centrum eſt circulorum ABC CDG. Quare ſi duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum. Quod oſtendendum fuit.

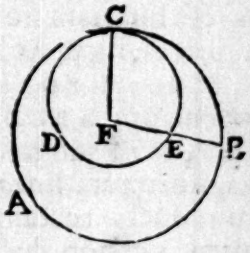


PROP.

PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit.

Duo enim circuli ABC CDE contingant ſeſe intra in puncto C. Dico ipſorum non eſſe idem centrum. Si enim fieri poteſt, ſit F, jungaturque FC, & FEB utcunque ducatur. Quoniam igitur F centrum eſt circuli ABC, æqualis eſt CF ipſi FB. rurſus quoniam F centrum eſt circuli CDE, erit CF æqualis FE. oſtenſa autem eſt CF æqualis FB. ergo & FE ipſi FB eſt æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur F punctum centrum eſt circulorum ABC CDE. Quare ſi duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit. Quod demonſtrare oportebat.

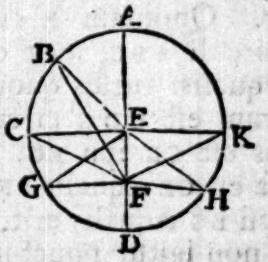


PROP. VII. THEOR.

Si in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quævis rectæ lineæ; maxima quidem erit in qua centrum: minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei quæ per centrum tranſit, ſemper remotiore major eſt. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utraſque partes minimæ.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, & in ipſa AD ſumatur aliquod punctum F, quod non ſit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: & à puncto F in circulum ABCD cadant quædam rectæ lineæ FB FC FG. Dico FA maximam eſſe, & FD minimam: aliarum vero, FB quidem majorem quam FC, & FC majorem quam FG. jungantur enim BE CE GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera [a] reliquo ſunt majora; erunt BE EF majores quàm BF. eſt autem AE æqualis BE. ergo. BE EF ipſi AF ſunt æquales. major igitur eſt AF quàm FB. rurſus quoniam BE eſt æqualis CE, communis autem FE, duæ BE EF duabus CE EF æquales

[a] 20. primi.



quales ſunt. ſed BEF angulus major eſt angulo CEF: baſis igitur BF baſi FC eſt [b] major. eadem ratione & CF major eſt quam FG. rurſus quoniam GF FE majores [a] ſunt quam GE, æqualis autem GE ipſi ED; erunt GF FE majores quam ED. communis auferatur FE. ergo reliqua GF major eſt quam reliqua FD. maxima igitur eſt FA, & FD minima: major vero BF quam FC, & FC quam FG major. Dico & à puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum ABCD ad utraſque partes minimæ FD. conſtituatur [c] enim ad lineam EF atque ad datum in ea punctum E, angulo GEF æqualis angulus FEH: & FH jungatur. Quoniam igitur GE eſt æqualis EH, communis autem EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales ſunt: & angulus GEF eſt æqualis angulo HEF. baſis igitur FG baſi FH æqualis [d] erit. Dico à puncto F in circulum non cadere aliam ipſi FG æqualem. ſi enim fieri poteſt, cadat FK & quoniam FK eſt æqualis FG, eſtque ipſi FG æqualis FH; erit & FK ipſi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum tranſit æqualis remotiori, quod fieri non poteſt. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, &c. Quod demonſtrare oportebat.

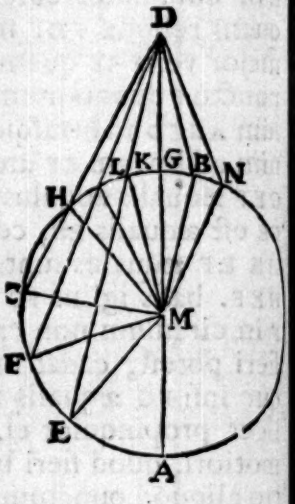
[b] 24. primi.
[a] 20. primi.
[c] 23. primi.
[d] 4. primi.

PROP. VIII. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ quarum una per centrum tranſeat, aliæ vero utcunque: earum quidem, quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima eſt quæ per centrum tranſit; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum, ſemper remotiore major eſt. at earum, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima eſt quæ inter punctum & diametrum interjicitur: aliarum vero quæ propinquior minimæ, ſemper remotiore eſt minor. duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad utraſque partes minimæ.

Sit circulus ABC, & extra circulum ſumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA DE DF DC: ſitque DA per centrum. Dico earum quidem, quæ in concavam AEFC circumferentiam cadunt, maximam eſſe DA, quæ per centrum tranſit; ~~& minimam, quæ inter punctum D & diametrum AG interjicitur, videlicet DG;~~ majorem autem DE quam DF; & DF majorem

majorem quam DC: earum vero quæ in convexam circumferentiam HLKG cadunt, quæ propinquior est minimæ DG semper remotiore esse minorem; hoc est DK minorem quam DL, & DL minorem quam DH. Sumatur [a] enim centrum circuli ABC, quod sit M, & jungantur ME MF MC MH ML MK, & quoniam AM est æqualis ME, communis apponatur MD. ergo AD est æqualis ipsis EM MD. sed EM MD sunt majores [b] quam ED. ergo & AD quam ED est major. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF, communis apponatur MD. erunt EM MD ipsi MF MD æquales; at angulus EMD major est angulo FMD. basis igitur ED basi FD major [c] erit. similiter demonstrabimus, & FD majorem esse quam CD. ergo maxima est DA; major autem DE quam DF, & DF quam DC major. Præterea quoniam MK KD sunt majores [b] quam MD, & MG est æqualis MK; erit reliqua KD quam reliqua [d] GD major. quare GD minor quam KD, & idcirco GD minima est. & quoniam trianguli MLD in uno latere MD, duæ rectæ lineæ MK KD intra constituantur, erunt [e] MK KD minores ipsis ML LD, quarum MK est æqualis ML. reliqua igitur DK minor est quam reliqua DL. similiter ostendemus, & DL quam DH minorem esse. ergo DG minima est. minor vero DK quam DL, & DL minor quàm DH. Dico etiam duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad utrasque minimæ partes. constituatur ad rectam lineam MD, ad datumque in ea punctum M, angulo KMD æqualis [f] angulus DMB, & DB jungatur. itaque quoniam MK est æqualis MB, communis autem MD, duæ KM MD duabus BM MD æquales sunt, altera alteri, & angulus KMD æqualis angulo BMD, basis igitur DK basi DB est æqualis [g]. Dico à puncto D aliam ipsi DK æqualem in circulum non cadere. si enim fieri potest, cadat DN. & quoniam DK est æqualis DN, & DK ipsi DB est æqualis; erit & DB æqualis DN, propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. quod ostendere oportebat.



[a] 1. hujus.
[b] 20. primi.
[c] 24. primi.
[d] Axiom. 4.
[e] 21. primi.
[f] 23. primi.
[g] 4. primi.

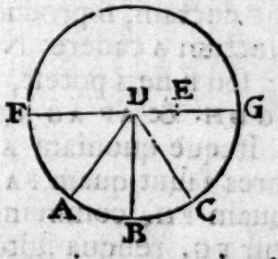
† minimam esse, quæ inter punctum D, et diametrum AG interjicitur, et quæ propinquior

PROP.

PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod ſumitur, circuli centrum erit.

Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum ABC cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales DA DB DC. Dico punctum D, quod ſumitur, circuli ABC eſſe centrum. Non enim; ſed, ſi fieri poteſt, ſit E centrum, & juncta DE in FG producatur. ergo FG [a] diameter eſt ABC circuli. itaque quoniam in FG diametro circuli ABC ſumptum eſt aliquod punctum D quod non eſt centrum circuli, maxima quidem erit DG, major [b] autem DC quam DB, & DB quam DA. ſed & æquales, [c] quod fieri non poteſt. non igitur E centrum eſt circuli ABC. ſimiliter oſtendemus neque aliud punctum centrum eſſe præter ipſum D. ergo D circuli BC centrum erit. Quod oportebat demonſtrare.



[a] Def. 17. primi.

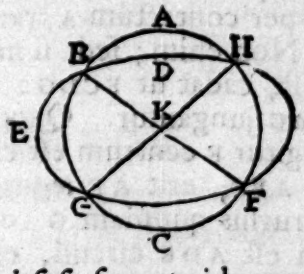
[b] 7. hujus.

[c] ex hyp.

PROP. X. THEOR.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non ſecat.

Si enim fieri poteſt circulus ABC circulum DEF ſecet in pluribus punctis, quam duobus; nempe in B, G, F, & circuli ABC centrum ſumatur, quod ſit K, & KB KG KF jungantur. Quoniam igitur intra circulum DEF ſumptum eſt aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incidant plures quam duæ rectæ lineæ KB KG KF æquales, erit punctum K circuli DEF centrum [a]. eſt autem & circuli ABC centrum K duorum igitur circulorum, qui ſeſe ſecant, idem erit K [b] centrum, quod fieri non poteſt. Quare circulus circulum in pluribus,



[a] 9. hujus.

[b] Ex hyp.

pluribus quam duobus punctis non ſecat. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli ſeſe intus contingant, & ſumantur centra ipſorum: recta linea ipſorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

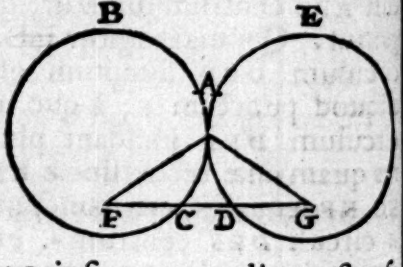
Duo enim circuli ABC ADE ſeſe intus contingant in puncto A, & ſumatur circuli quidem ABC centrum quod ſit F; circuli vero ADE centrum G. Dico rectam lineam à puncto G ad F ductam, ſi producatur, in punctum A cadere. Non enim; ſed ſi fieri poteſt, cadat ut FGDH. & AF AG jungantur. Itaque quoniam AG GF majores [a] ſunt quam FA, hoc eſt quam FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG major eſt quam reliqua GH. ſed AG eſt æqualis GD, ergo GD ipſa GH eſt major, minor majore, quod fieri non poteſt. non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet. quare in ipſum cadat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſeſe intus contingant, recta linea ipſorum centra conjungens, ſi producatur, in contactum circulorum cadet. Quod oportebat demonſtrare.

[a] 20. primi.

PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit.

Duo enim circuli ABC ADE ſeſe extra contingant in puncto A; & ſumatur circuli quidem ABC centrum quod ſit F; circuli vero ADE centrum G. Dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A tranſire. Non enim; ſed, ſi fieri poteſt, cadat ut FCDG: & FA AG jungantur. Quoniam igitur F centrum eſt circuli ABC, erit AF æqualis FC. rurſus quoniam G centrum eſt ADE circuli, erit AG ipſi GD æqualis. oſtenſa eſt autem, & AF æqualis FC. ſunt igitur FA AG ipſis FC DG æquales, ergo tota FG major eſt quam FA AG. ſed & minor,



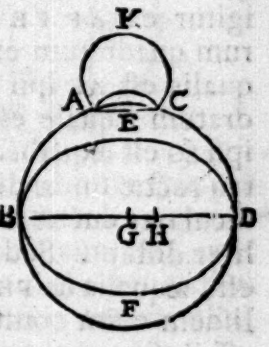
minor [a], quod fieri non poteſt. non igitur à puncto F ad C ducta recta linea per contactum A non tranſibit. quare per ipſum tranſeat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit. Quod oportebat demonſtrare.

[a] 20. primi.

PROP. XIII. THEOR.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, ſive intus ſive extra contingat.

Si enim fieri poteſt, circulum ABCD circulus EBFD contingat, primum intus, in pluribus punctis quam uno, videlicet in B, D: & ſumatur circuli quidem ABDC centrum G, circuli vero EBFD centrum H. ergo recta linea quæ à puncto G ad H ducitur, in puncta [a] B, D cadet. cadat ut BGHD. Et quoniam G centrum eſt circuli ABDC, erit BG ipſi GD æqualis. major igitur eſt BG quam HD: & BH quam HD multo major. rurſus quoniam H centrum eſt EBFD circuli, æqualis eſt BH ipſi HD. atqui oſtenſa eſt ipſa multo major, quod fieri non poteſt. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quam uno. Dico etiam neque extra contingere. ſi enim fieri poteſt, circulus ACK circulum ABDC extra contingat in pluribus punctis quàm uno, videlicet in AC, & AC jungatur. itaque quoniam in circumferentia utrorumque circulorum ABCD ACK ſumpta ſunt duo puncta A, C; recta linea, quæ ipſa conjungit intra utrumque ipſorum cadet [b]. ſed intra circulum quidem ABDC cadit, extra circulum vero ACK, quod eſt abſurdum. Non igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis quàm uno. oſtenſum autem eſt neque intus contingere. Circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, ſive intus, ſive extra contingat. Quod oportebat demonſtrare.



[a] 12. hujus.

[b] 2. hujus.

PROP. XIV. THEOR.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro diſtant: & quæ æqualiter à centro diſtant, inter ſe ſunt æquales.

Sit circulus ABDC, & in ipſo æquales rectæ lineæ AB CD, Dico eas à centro æqualiter diſtare. Sumatur enim circuli

ABDC

ABDC centrum quod ſit E, & ab ipſo ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG, & AE EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos
a 3. hujus. angulos ſecat, & bifariam ipſam ſecabit a. quare AF eſt æqualis FB, ideoque AB ipſius AF dupla. eadem ratione, & CD dupla eſt CG. atque eſt AB ipſi CD æqualis. æquales igitur & AF ipſi CG. & quoniam AE eſt æqualis EC, erit & quadratum ex AE quadrato ex EC æquale. ſed quadrato

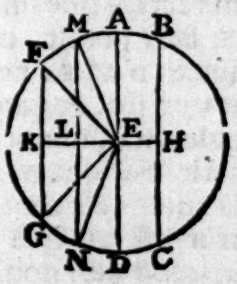
b 47. primi. quidem ex AE æqualia ſunt ex AF FE quadrata b; rectus enim angulus eſt ad F: quadrato autem ex EC æqualia ſunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G ſit rectus. quadrata igitur ex AF FE æqualia ſunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG æquale, etenim æqualis eſt AF ipſi CG. reliquum igitur quod fit ex FE quadratum æquale eſt reliquo quod ex EG; ac propterea FE ipſi EG eſt æqualis. in circulo autem æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpen-
c 4. def. hujus. diculares ductæ æquales c ſunt. ergo AB CD à centro æqualiter diſtant. Sed ſi AB CD æqualiter diſtent à centro, hoc eſt, æqualis ſit FE ipſi EG; dico AB ipſi CD æqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus AB duplam eſſe ipſius AF, CD duplam ipſius CG. & quoniam æqualis eſt AE ipſi EC, erit & ex AE quadratum quadrato ex EC æquale. ſed quadrato quidem ex AE æqualia b ſunt quadrata ex EF FA: quadrato autem ex EC æqualia b quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia ſunt; quorum quadratum ex EG æquale eſt quadrato ex EF, eſt enim EG ipſi EF æqualis: reliquum igitur ex AF quadratum æquale eſt reliquo ex CG. ergo AF ipſi CG eſt æqualis. atque eſt AB ipſius AF dupla, & CD dupla ipſius CG. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro diſtant. Et quæ æqualiter à centro diſtant, inter ſe ſunt æquales. Quod oportebat demonſtrare.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem eſt diameter: aliarum vero ſemper propinquior ei quæ per centrum tranſit, remotiore major eſt.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum E; & propinquior quidem diametro AD ſit BC; remotior vero FG. Dico AD maximam eſſe, & BC majorem quam FG. Ducantur enim à centro E ad BC FG perpendiculares EH EK. & quoniam BC propinquior eſt ei quæ per centrum tranſit, remotior autem FG; erit EK quam EH major. ponatur ipſi EH æqualis EL, & per L ipſi EK ad rectos angulos ducta LM in N producatur, & jungatur EM EN EF EG. quoniam igitur EH eſt æqualis EL, erit & BC ipſi MN æqualis [a]. rurſus quoniam



[a] 14. hujus.

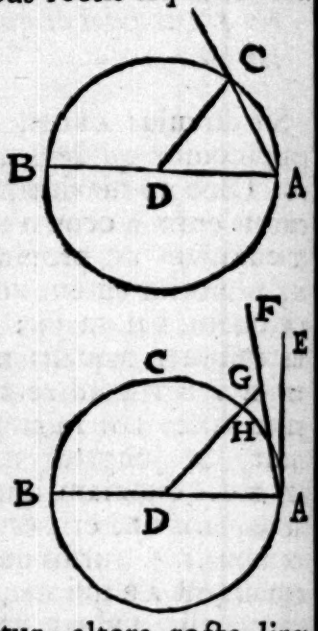
æqualis eſt AE ipſi EM, & DE ipſi EN, erit & AD ipſis ME EN æqualis. ſed ME EN [b] majores ſunt quam MN; ergo & [b] 20. primi. AD major eſt quam MN: & MN eſt æqualis BC, erit igitur AD quam BC major. quod cum duæ EM EN duabus FE EG æquales ſint, anguluſque MEN major angulo FEG, & baſis MN baſi FG major [c] erit. oſtenſa autem eſt MN æ- [c] 24. primi. qualis BC. ergo & BC quam FG eſt major. maxima igitur eſt AD diameter, & BC major quam FG. Quare in circulo maxima eſt diameter, aliarum vero ſemper propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore eſt major. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur altera recta linea non cadet: & ſemicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major eſt; reliquus autem minor.

Sit circulus ABC circa centrum D, & diametrum AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ipſi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. Non enim; ſed, ſi fieri

poteſt, cadat intus, ut AC, & DC jungatur. itaque quoniam æqualis eſt DA ipſi DC, erit & angulus DAC angulo ACD
a 5. primi. æqualis a. rectus autem eſt DAC b; ergo & ACD eſt rectus;
b ex hyp. ac propterea anguli DAC ACD duabus rectis æquales ſunt.
c 17. primi. quod fieri non poteſt c. non igitur à puncto A ipſi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. ſimiliter oſtendemus neque in circumferentiam cadere. Extra igitur cadat neceſſe eſt. cadat ut AE. Dico in locum qui inter rectam lineam AE & circumferentiam CHA interjicitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri poteſt, cadat ut FA, & à puncto D ad FA perpendicularis
d 12 primi. d ducatur DG. & quoniam rectus eſt angulus AGD, minor autem recto
e 19. primi. DAG, erit DA quàm DG major e. æqualis autem eſt DA ipſi DH. major igitur eſt DH ipſa DG, minor majore, quod fieri non poteſt. non igitur in locum qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum ſemicirculi, qui recta linea BA, & circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem eſſe; reliquum vero contentum circumferentia CHA, & recta linea AE omni angulo rectilineo eſſe minorem. Si enim eſt aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento recta linea BA, & CHA circumferentia, aut aliquis minor contento CHA circumferentia, & recta linea AE, in locum qui inter circumferentiam CHA, & rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum majorem quidem contento recta linea BA & CHA circumferentia, qui ſcilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA, & AE
f ex prius demonſtratis. recta linea, non cadit autem f: non igitur erit angulus acutus qui rectis lineis continetur, major angulo contento recta linea BA, & CHA circumferentia; neque minor contento circumferentia CHA, & AE recta linea.



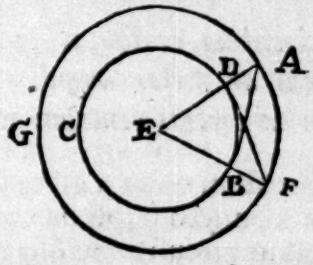
Cor. Ex hoc manifeſtum eſt rectam lineam quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere, & rectam lineam contingere circulum in uno tantum puncto, quoniam quæ occurrit in duobus punctis intra ipſum cadit, ut oſtenſum eſt.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere quæ datum circulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD. Oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. Sumatur enim centrum circuli E; & juncta AE, centro quidem E, intervallo autem EA circulus AFG describatur: & à puncto D ipsi EA ad rectos angulos [a] ducatur DF: junganturque EBF AB. Dico à puncto A ductam esse AB quæ circulum BCD contingit. Quoniam enim E centrum est circulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, & ED ipsi EB. duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, & angulum communem continent, qui est ad E. ergo basis DF basi AB est [b] æqualis, triangulumque DEF æquale triangulo EBA, & reliqui anguli reliquis angulis. æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. & EDF rectus est. quare & rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulum contingit [c]. ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB quæ circulum BCD contingit. Quod facere oportebat.



[a] 11. primi.

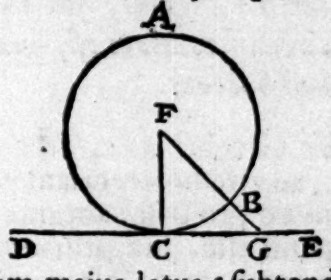
[b] 4. hujus.

[c] Cor. 16. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: & circuli ABC centrum sumatur F, à quo ad C ducatur FC. Dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. Si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis [a] FG. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus [b], ac propterea FGC angulus major angulo FCG. majorem autem angulum majus latus [c] subtendit. major igitur est FC quàm FG. æqualis autem FC ipsi FB



[a] 12. primi.

[b] 32. primi.

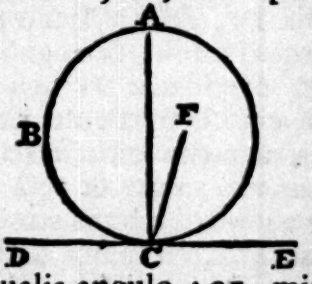
[c] 19. primi.

ergo FB ipſa FG eſt major, minor majore, quod fieri non poteſt. non igitur FG eſt perpendicularis ad DE. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam eſſe præter ipſam FC. ergo FC ad DE eſt perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur: in ea circuli centrum erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C, & à puncto C ipſi DE ad rectos angulos ducatur CA. Dico in ipſa AC circuli centrum eſſe. Non enim; ſed, ſi fieri poteſt, ſit F centrum, & jungatur CF. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea DE, & à centro ad contactum ducta eſt FC; erit FC ad ipſam DE perpendicularis [a]. rectus igitur angulus eſt FCE. eſt autem & ACE rectus [b]. ergo FCE angulus eſt æqualis angulo ACE, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur F centrum eſt ABC circuli. ſimiliter oſtendemus neque aliud aliquod eſſe præterquam in ipſa AC. Quare ſi circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 18. hujus.

[b] Ex hyp.

PROP. XX. THEOR.

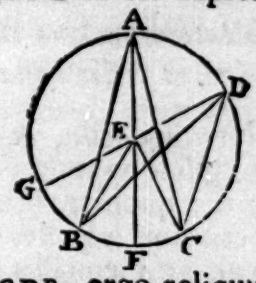
In circulo angulus, qui ad centrum, duplex eſt ejus qui ad circumferentiam eſt, quando circumferentiam eandem pro baſi habeant.

Sit circulus ABC, ad cujus centrum quidem angulus ſit BEC, ad circumferentiam vero BAC, & eandem circumferentiam BC pro baſi habeant. Dico BEC angulum anguli BAC duplum eſſe. Jungatur enim AE, & ad F producatur. itaque quoniam EA eſt æqualis EB, erit & angulus EAB angulo EBA [a] æqualis. anguli igitur EAB EBA duplices ſunt ipſius

[a] 5. primi.

ipſius anguli EAB; ſed angulus BEF eſt æqualis *b* angulis EAB EBA; ergo BEF angulus anguli EAB eſt duplex. eadem ratione & angulus FEC duplex eſt ipſius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplex erit. rurſus inflectatur, & ſit alter angulus BDC, junctaque DE ad G producatur. ſimiliter oſtendemus angulum GEC anguli GDC duplum eſſe; quorum GEB duplus eſt ipſius GDB. ergo reliquus BEC reliqui BDC eſt duplus. In circulo igitur angulus qui ad centrum, duplex eſt ejus qui ad circumferentiam eſt, quando circumferentiam eandem pro baſi habeant. Quod oportebat demonſtrare.

b 32. primi.

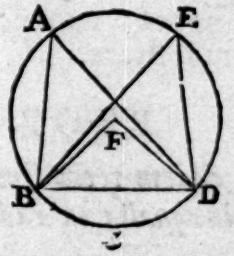


PROP. XXI. THEOR.

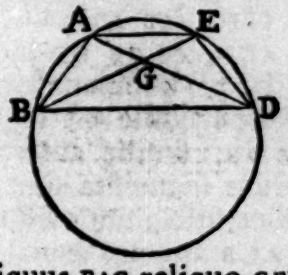
In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli inter ſe æquales ſunt.

Sit circulus ABCDE, & in eodem ſegmento BAED anguli ſint BAD BED. Dico eos inter ſe æquales eſſe. Sumatur enim circuli ABCDE centrum quod ſit F: jungantur-que BF FD. Quoniam angulus quidem BFD eſt ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & circumferentiam eandem BCD pro baſi habent; erit BFD angulus *a* anguli BAD duplus. eadem ratione angulus BFD duplus eſt etiam anguli BED. ergo angulus BAD angulo BED æqualis erit. Si anguli BAD BED ſunt in ſegmento minore ſemicirculo, ducatur AE, eruntque omnes anguli trianguli ABG æquales *b* omnibus angulis trianguli DEG. & anguli ABE ADE ſunt æquales per hactenus demonſtrata, & anguli AGB DGE ſunt etiam æquales *c*, ad verticem enim ſunt: quare & reliquus BAG reliquo GED æqualis erit. In circulo, igitur qui in eodem ſegmento ſunt anguli inter ſe æquales ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

a 20. hujus.



b 32. primi.

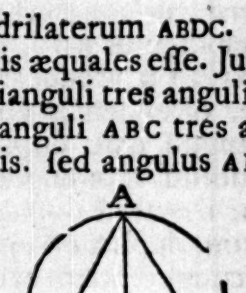


c 15. primi.

PROP. XXII. THEOR.

Quadrilaterorum quæ in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis æquales ſunt.

Sit circulus ABDC, & in ipſo quadrilaterum ABDC. Dico angulos ipſius oppoſitos duobus rectis æquales eſſe. Jungantur AD BC: quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duo-
a 32.primi. bus rectis ſunt æquales a, erunt trianguli ABC tres anguli CAB ABC BCA æquales duobus rectis. ſed angulus ABC eſt
b 21 quinti. Hujus æqualis b angulo ADC, in eodem enim ſunt ſegmento AB DC. & angulus ACB æqualis b ipſi ADB, quod ſunt in eodem ACDB ſegmento: totus igitur angulus BDC angulis ABC ACB æqualis eſt. communis apponatur BAC angulus; erunt

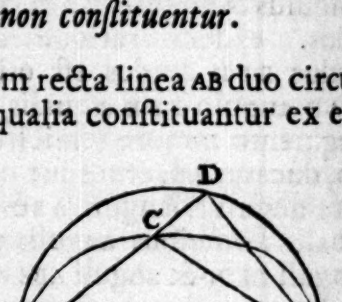


anguli BAC ABC ACB angulis BAC BDC æquales. ſed BAC ABC ACB ſunt æquales a duobus rectis. ergo & anguli BAC BDC duobus rectis æquales erunt. ſimiliter oſtendemus angulos quoque ABD ACD duobus rectis eſſe æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis æquales ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem recta linea duo circulorum ſegmenta ſimilia, & inæqualia ex eadem parte non conſtituentur.

Si enim fieri poteſt, ſuper eadem recta linea AB duo circulorum ſegmenta ſimilia, & inæqualia conſtituantur ex eadem parte ACB ADB; ducaturque ACD, & CB BD jungantur. Itaque quoniam ſegmentum ACB ſimile eſt ſegmento ADB, ſimilia autem circulorum ſegmenta ſunt quæ
a Def. 11. hujus. angulos ſuſcipiunt a æquales; erit ACB angulus æqualis an-
b 16.primi. gulo ADB, exterior interiori, quod fieri non poteſt b. Non igitur ſuper eadem recta linea, duo circulorum ſegmenta ſimilia, & inæqualia ex eadem parte conſtituentur. Quod demonſtrare oportebat.

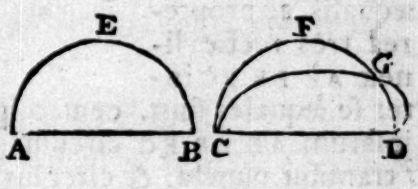


PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

Super æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt.

Sint enim super æqualibus rectis lineis AB CD similia circulorum segmenta AEB CFD. Dico segmentum AEB segmento CFD æquale esse. Applicato enim AEB segmento segmento CFD, & posito puncto quidem A in C, recta vero linea AB in CD; congruet & B punctum puncto D, propterea quod AB ipsi CD sit æqualis. congruente autem recta linea AB rectæ CD; congruet & AEB segmentum segmento CFD. si enim AB congruet ipsi CD, segmentum autem AEB segmento CFD non congruet, sed permutabitur ut CGD, circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus CGD circulum CFD secat in pluribus punctis quàm duobus, videlicet in punctis C, G, D, quod fieri non [a] potest. non igitur congruente recta linea AB rectæ CD, non congruet & AEB segmentum segmento CFD. quare congruet, & ipsi æquale erit. Super æqualibus igitur rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.



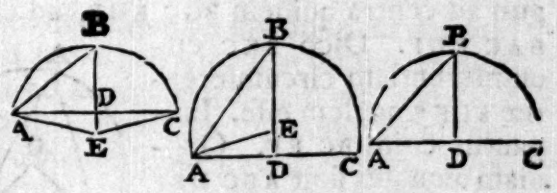
[a] 10. hujus.

PROP. XXV. PROBL.

Circuli segmento dato describere circulum cujus est segmentum.

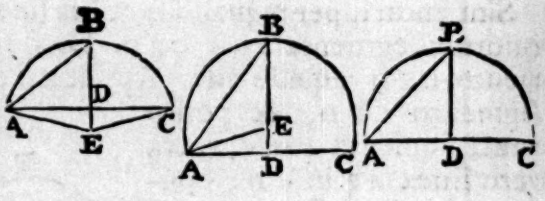
Sit datum circuli segmentum ABC. Oportet describere circulum cujus ABC est segmentum. Secetur AC bifariam [a] in D: & à puncto D ipsi AC ad rectos angulos ducatur [b] DB, & AB jungatur. Vel igitur angulus ABD major est angulo BAD, vel minor, vel ipsi æqualis. Sit primum major, & ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A constituatur angulus BAE æqualis [c] angulo ABD; & DB ad E producatur, jungaturque EC. Quoniam igitur angulus ABE est æqualis

[a] 10. primi.
[b] 11. primi.
[c] 23. primi.



angulo BAE, [d] erit & BE recta linea ipſi EA æqualis: & quoniam AD eſt æqualis DC, communis autem DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales ſunt, altera alteri; & angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus enim uterque eſt. ergo & baſis AE baſi EC eſt æqualis [e] ſed oſtenſa eſt AE æqualis EB. quare & BE ipſi EC eſt æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE EB EC inter ſe æquales ſunt. centro igitur E, intervallo autem unâ ipſarum AE EB EC circulus deſcriptus etiam per reliqua [f] tranſibit puncta, & circulus deſcriptus erit. quare circuli ſegmento dato deſcriptus eſt circulus cujus ſegmentum eſt. ſed & illud conſtat, ſegmentum ABC ſemicirculo minus eſſe; propterea quod centrum ipſius extra cadit. [g] Similiter, & ſi angulus ABD ſit æqualis angulo BAD, facta AD æquali utrique ipſarum BD DC, erunt tres rectæ lineæ AD DB DC inter ſe æquales, atque erit D circuli deſcripti centrum, & ſegmentum ABC ſemicirculus. [h] Si vero angulus ABD minor ſit angulo BAD; conſtituatur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus BAE intra ſegmentum ABC. erit E centrum in ipſa DB, atque erit ABC ſegmentum ſemicirculo majus. Circuli igitur ſegmento dato deſcriptus eſt circulus cujus ſegmentum eſt. Quod facere oportebat.

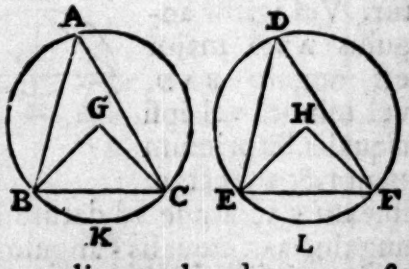
d 6. primi.
e 4. primi.
f 9. hujus.
g Caſ. 3. fig. 3.
h Caſ. 2. fig. 2.



PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus inſiſtunt circumferentiis, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant.

Sint æquales circuli ABC DEF, & in ipſis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. Dico BKC circumferentiam circumferentiæ ELF æqualem eſſe. Jungantur enim BC EF. Quoniam æquales ſunt ABC DEF circuli, erunt & quæ ex centris æquales. duæ igitur BG GC duabus EH HF æquales ſunt: & angulus ad G æqualis angulo ad H. ergo & baſis



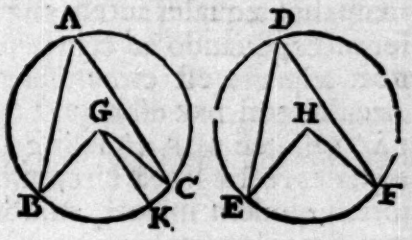
baſis BC baſi EF eſt [a] æqualis. rurſus quoniam æqualis eſt angulus ad A angulo ad D, ſegmentum BAC ſimile [b] erit ſegmento EDF: & ſunt ſuper æqualibus rectis lineis BC EF. quæ autem ſuper æqualibus rectis lineis ſimilia ſunt circulorum ſegmenta, inter ſe æqualia [c] ſunt. ſegmentum igitur BAC ſegmento EDF eſt æquale. ſed & totus ABC circulus æqualis eſt toti DEF. ergo & reliqua circumferentia BKC reliquæ ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus inſiſtunt circumferentiis, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant. Quod oportebat demonſtrare.

[a] 4. primi.
[b] Def. 11. hujus.
[c] 24. hujus.

PROP. XXVII. THEOR.

In æqualibus circulis anguli qui æqualibus inſiſtunt circumferentiis inter ſe æquales ſunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant.

In æqualibus enim circulis ABC DEF, æqualibus circumferentiis BC EF inſiſtant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. Dico angulum BGC angulo EHF, & angulum BAC angulo EDF æqualem eſſe. Si quidem igitur angulus BGC æqualis ſit angulo EHF, manifeſtum eſt angulum quoque BAC angulo EDF [a] eſſe æqualem. ſin minus, unus ipſorum eſt major. ſit major BGC, & conſtituatur ad rectam lineam BG, & ad punctum in ipſa G, angulo EHF æqualis [b] angulus BGK. æquales autem anguli æqualibus inſiſtunt [c] circumferentiis, quando ad centra fuerint. ergo circumferentia BK æqualis eſt circumferentiæ EF. ſed circumferentia EF æqualis eſt ipſi BC. ergo & BK ipſi BC eſt æqualis. minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur inæqualis eſt angulus BGC angulo EHF: ergo eſt æqualis. atque eſt anguli quidem BGC dimidium angulus qui ad A; anguli vero EHF dimidium qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D eſt æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli qui æqualibus inſiſtunt circumferentiis inter ſe æquales ſunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant. Quod oportebat demonſtrare.



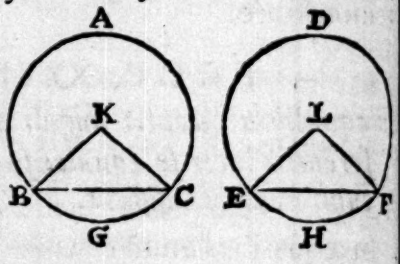
[a] 20. hujus.
[b] 23. primi.
[c] 26. hujus.

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ABC DEF; & in ipsis æquales rectæ lineæ BC EF, quæ circumferentias quidem BAC EDF majores auferant, circumferentias vero BGC EHF minores. Dico circumferentiam BAC majorem majori circumferentiæ EDF, & minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem esse. Sumantur enim centra [a] circulorum K, L, junganturque BK KC EL LF. Quoniam circuli æquales sunt, erunt & quæ ex centris æquales [b]. duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF: & basis BC æqualis est basi EF, ergo angulus BKC angulo ELF est [c] æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint [d]. quare circumferentia BGC æqualis est circumferentiæ EHF, sed & totus ABC circulus toti DEF est æqualis. reliqua igitur circumferentia BAC reliquæ EDF æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. Quod demonstrare oportebat.



[a] 1. hujus.
[b] Def. 1. hujus.
[c] 8. primi.
[d] 26. hujus.

PROP. XXIX. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

Vide figur. Prop. præcedentis.

Sint æquales circuli ABC DEF: & in ipsis æquales assumantur circumferentiæ BGC EHF, & BC EF jungantur. Dico rectam lineam BC rectæ EF æqualem esse. Sumantur enim centra [a] circulorum K, L, & jungantur BK KC EL LF. Quoniam igitur circumferentia BGC est æqualis circumferentiæ EHF, erit & angulus BKC angulo ELF æqualis [b]. & quoniam circuli ABC DEF sunt æquales, & quæ ex centris æquales erunt [c]. duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF; & æquales angulos continent. quare basis BC basi EF est [d] æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. Quod oportebat demonstrare.

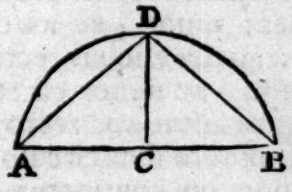
[a] 1. hujus.
[b] 27. hujus.
[c] Def. 1. hujus.
[d] 4. primi.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam ſecare.

Sit data circumferentia ADB. oportet ADB circumferentiam bifariam ſecare. Jungatur AB, & in c bifariam [a] ſecetur: à puncto autem c ipſi AB ad rectos angulos ducatur CD. & jungantur AD DB. quoniam igitur AC eſt æqualis CB, communis autem CD, duæ AC CD duabus BC CD æquales ſunt: & angulus ACD æqualis angulo BCD, rectus enim uterque eſt: ergo baſis AD baſi BD eſt [b] æqualis. æquales autem rectæ lineæ [c] cricumferentias æquales aufe-runt, quare circumferentia AD circumferentiæ BD æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam ſecta eſt. Quod facere oportebat.



[a] 10. primi.

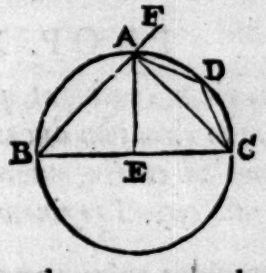
[b] 4. primi.

[c] 28. hujus.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt, qui vero in majori ſegmento, minor eſt recto, & qui in minori, major recto; & inſuper majoris quidem ſegmenti angulus recto major eſt, minoris vero ſegmenti angulus recto minor.

Sit circulus ABCD cujus diameter BC, centrum autem E; & jungantur BA AC AD DC. Dico angulum quidem qui eſt in ſemicirculo BAC rectum eſſe, qui vero in ſegmento ABC majore ſemicirculo, videlicet angulum ABC, minorem eſſe recto, & qui eſt in ſegmento ADC minore ſemicirculo, hoc eſt angulum ADC, recto majorem. Jungatur AE, & BA ad F producatur. Itaque quoniam BE eſt æqualis EA, erit & angulus EAB, angulo EBA æqualis [a]. rurſus quoniam AE eſt æqualis EC, & angulus ACE angulo CAE æqualis [a] erit. totus igitur angulus BAC eſt æqualis duobus ABC ACB angulis, eſt autem, & angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC ACB æqualis [b]. angulus igitur BAC eſt æqualis angulo FAC; ac propterea uterque ipſorum rectus [c]. quare in ſemicirculo BAC angulus CAB rectus eſt.

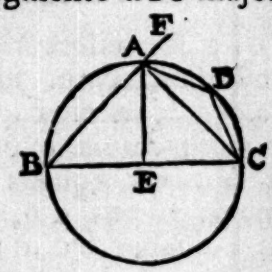


[a] 5. primi.

[b] 32. primi

[c] Def. 10. primi.

eſt. & quoniam trianguli ABC duo anguli ABC BAC duo-
d 17.primi. bus rectis ſunt d minores, rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor, atque eſt in ſegmento ABC majore ſemicirculo. quod cum in circulo quadrilaterum ſit ABCD, quadrilaterorum vero qui in circulis deſcribuntur, anguli
e 22. hujus. oppoſiti duobus rectis ſunt e æquales: erunt ABC ADC anguli æquales duobus rectis, & angulus ABC minor eſt recto, reliquus igitur ADC recto major erit, atque eſt in ſegmento ADC minore ſemicirculo. Dico præterea majoris ſegmenti angulum qui continetur ABC circumferentia, & recta linea AC recto majorem eſſe; angulum vero minoris ſegmenti, contentum circumferentia ADC, & recta linea AC recto minorem. quod quidem perſpicue apparet. Quoniam angulus qui rectis lineis BA AC continetur rectus eſt, erit & contentus ABC circumferentia, & recta linea AC recto major. rurſus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF rectus eſt, erit qui continetur recta linea CA, & ADC circumferentia, minor recto. In circulo igitur angulus qui in ſemicirculo, rectus eſt, qui vero in majore ſegmento, minor eſt recto, & qui in minori, major recto: & inſuper majoris quidem ſegmenti angulus recto major eſt, minoris vero recto minor. Quod demonſtrare oportebat.



Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi trianguli unus angulus ſit æqualis duobus, eum rectum eſſe; propterea quòd & qui deinceps eſt, iiſdem eſt æqualis. quando autem anguli de-
f Def. 10. primi. inceps ſunt æquales, neceſſario recti ſunt f.

PROP. XXXII. THEOR.

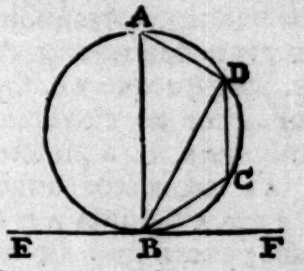
Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt.

Circulum enim ABCD contingat quædam recta linea EF in B, & à puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipſum utcunque ſecans. Dico angulos quos BD cum EF contingente facit, æquales eſſe iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt. hoc eſt angulum FBD eſſe æqualem angulo qui conſtituitur in DAB ſegmento, videlicet ipſi

DAB;

DAB; angulum vero DBE æqualem angulo DCB qui in ſegmento BCD conſtituitur. Ducatur enim à puncto B ipſi EF ad rectos [a] angulos BA: & in circumferentia BD ſumatur quodvis punctum C; jungunturque AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B, & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta eſt BA; erit in ipſa BA centrum [b] ABCD circuli; quare BA ejuſdem circuli [c] diameter eſt, & angulus ADB in ſemicirculo eſt [d] rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD uni recto [e] æquales ſunt. ſed & ABF [f] eſt rectus. ergo angulus ABF æqualis eſt angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterno circuli ſegmento conſiſtit, videlicet angulo BAD, eſt æqualis. & quoniam in circulo quadrilaterum eſt ABCD, & anguli ejus oppoſiti æquales [g] ſunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD oſtenſus eſt æqualis ipſi DBF; ergo reliquus DBE ei, qui in alterno circuli ſegmento DCB conſtituitur, videlicet ipſi DCB, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans; anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt. Quod oportebat demonſtrare.

[a] 11. primi.

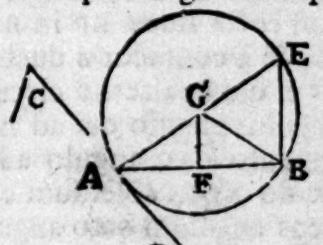


[b] 19. hujus.
[c] Def. 17. primi.
[d] 31. hujus.
[e] 32. primi.
[f] ex conſtr.
[g] 22. hujus.

PROP. XXXIII. PROBL.

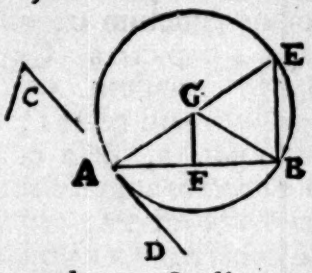
Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod ſuſcipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. Itaque oportet ſuper data recta linea AB deſcribere ſegmentum circuli, quod ſuſcipiat angulum æqualem angulo qui eſt ad C. Ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea datum A, conſtituatur angulus BAD angulo qui eſt ad C æqualis [a]. & à puncto A ipſi AD ad rectos angulos [b] ducatur AE; ſecetur autem AB bifariam [c] in F, atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipſi AB; & GB jungatur. Quoniam igitur AF eſt æqualis FB, communis



[a] 23. primi.
[b] 11. primi.
[c] 10. primi.

munis autem FG, duæ AF FG duabus BF FG æquales ſunt: & angulus AFG æqualis angulo BFG. ergo baſis AG baſi
d 4. hujus. GB eſt d æqualis. itaque centro G, intervallo autem AG circulus deſcriptus tranſibit etiam per B. deſcribatur, & ſit ABE, jungaturque EB. Quoniam igitur ab extremitate diametri AE, & à puncto A, ipſi AE ad rectos angulos ducta eſt AD; ipſa AD circulum e continget. & quoniam circulum ABE contingit quædam recta linea AD, & à contactu qui eſt ad A, in circulum ABE ducta eſt recta
f 32. hujus. linea AB: erit angulus DAB æqualis f angulo qui in alterno circuli ſegmento conſtituitur, videlicet ipſi AEB. ſed angulus DAB, angulo ad C eſt æqualis. ergo & angulus ad C angulo AEB æqualis erit. Super data igitur recta linea AB, ſegmentum circuli deſcriptum eſt AEB ſuſcipiens angulum AEB, dato angulo qui eſt ad C, æqualem. Quod facere oportebat.

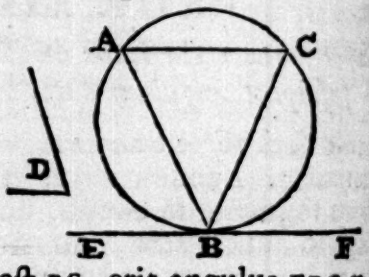


e Cor. 16. hujus.

PROP. XXXIV. PROBL.

A dato circulo ſegmentum abſcindere quod ſuſcipiat angulum dato rectilineo æqualem.

Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus qui ad D. Oportet à circulo ABC ſegmentum abſcindere,
a 17. hujus. quod ſuſcipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur a recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens: & ad rectam lineam BF, & ad punctum in ea B, conſtituatur angulus FBC angulo qui eſt
b 23. primi. ad D æqualis b. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, & à contactu B ducta eſt BC, erit angulus FBC æ-
c 32. hujus. qualis c ei qui in alterno circuli ſegmento conſtituitur. ſed FBC angulus angulo qui ad D eſt æqualis. ergo & angulus in ſegmento BAC angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC, abſciſſum eſt ſegmentum quoddam BAC, ſuſcipiens angulum dato angulo rectilineo qui eſt ad D, æqualem. Quod facere oportebat.

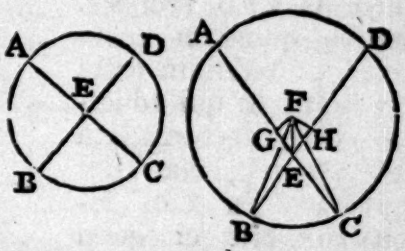


PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, rectangulum ſub ſegmentis unius contentum, æquale eſt ei, quod ſub alterius ſegmentis continetur, rectangulo.

In circulo enim ABCD, duæ rectæ lineæ AC BD ſeſe mutuo in puncto E ſecent. Dico rectangulum contentum ſub AE EC æquale eſſe ei quod ſub DE EB continetur. Si AC BD per centrum tranſeant, ita ut E ſit centrum ABCD circuli; manifeſtum eſt æqualibus exiſtentibus AE EC DE EB, & rectangulum contentum ſub AE EC æquale eſſe ei quod ſub DE EB continetur. Si AC DB non tranſeant per centrum, ſumatur centrum circuli ABCD quod ſit F: & ab F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH: junganturque FB FC FE. Quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, & bifariam ipſam ſecabit [a]. quare AG ipſi GC eſt æqualis. & quoniam recta linea AC ſecta eſt in partes æquales in puncto G, & in partes inæquales in E, erit rectangulum ſub AE EC contentum, una cum ipſius EG quadrato [b], æquale quadrato ex GC. commune addatur ex GF quadratum. ergo rectangulum ſub AE EC, una cum iis quæ ex EG GF quadratis, æquale eſt quadratis ex CG GF. ſed quadratis quæ ex EG GF æquale [c] eſt quadratum ex FE: quadratis vero ex CG GF æquale eſt [c] quod ex FC fit quadratum. rectangulum igitur ſub AE EC, una cum quadrato ex FE, æquale eſt quadrato ex FC. eſt autem CF æqualis FB. ergo rectangulum ſub AE EC, unà cum quadrato ex EF, æquale eſt ei quod ex FB fit quadratum. eadem ratione & rectangulum ſub DE EB unà cum quadrato ex FE, æquale eſt quadrato ex FB. oſtenſum autem eſt & rectangulum ſub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale ei quod fit ex FB quadrato. ergo rectangulum ſub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale eſt rectangulo ſub DE EB, unà cum quadrato ex FE. commune auferatur FE quadratum. reliquum igitur rectangulum ſub AE EC, reliquo ſub DE EB rectangulo æquale erit. Quare ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, rectangulum ſub ſegmentis unius contentum æquale eſt ei quod ſub alterius ſegmentis continetur. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 3. hujus.

[b] 5. ſecundi.

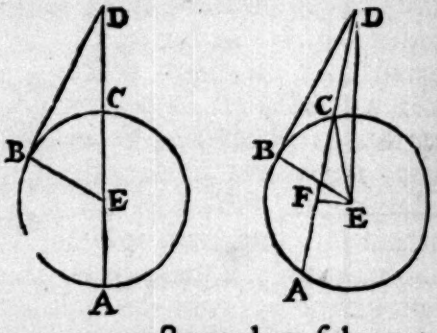
[c] 47. primi.

PROP.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecat, altera vero contingat; rectangulum quod ſub tota ſecante, & exterius aſſumpta inter punctum & curvam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit, quadrato.

Extra circulum enim ABC ſumatur aliquod punctum D, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA DB: & DCA quidem circulum ABC ſecet; DB vero contingat. Dico rectangulum ſub AD DC, quadrato, quod fit ex DB, æquale eſſe. Vel igitur DCA per centrum tranſit, vel non tranſit. Primum tranſeat per centrum circuli ABC, quod ſit E, & EB jungatur. erit



[a] 18. hujus angulus EBD rectus [a]. itaque quoniam recta linea AC bifariam ſecta eſt in E, & ipſi adjicitur CD, rectangulum ſub AD DC, una cum quadrato ex EC, æ-

[b] 6. ſecundi. quale [b] erit ei quod fit ex ED quadrato. æqualis autem eſt CE ipſi EB, ergo rectangulum ſub AD DC, unà cum quadrato quod ex EB, æquale eſt quadrato ex ED.

[c] 47. primi. ſed quadratum ex ED eſt æquale quadratis [c] ipſarum EB BD, rectus enim angulus eſt EBD. rectangulum igitur ſub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale eſt ipſarum EB, BD quadratis. commune auferatur quadratum quod ex EB; ergo reliquum ſub AD DC rectangulum, quadrato quod fit à contingente DB æquale erit. Secundo DCA non tranſeat

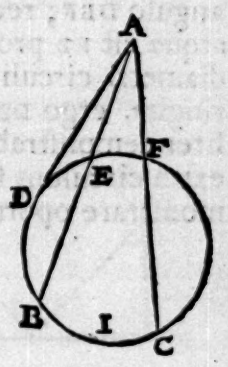
[d] 1. hujus. per centrum ABC circuli: ſumaturque [d] centrum E, & ad AC perpendicularis agatur EF, & jungantur EB EC ED, rectus igitur eſt EFD angulus. & quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, & bifa-

[e] 3. hujus. riam ipſam ſecabit [e]. quare AF ipſi FC eſt æqualis. rurſus quoniam recta linea AC bifariam ſecta eſt in F, atque ipſi adjicitur CD, erit rectangulum ſub AD DC, unà cum quadrato ex FC, æquale [b] quadrato quod ex FD. commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur ſub

AD DC

AD DC unà cum quadratis ex FC FE eſt æquale quadratis ex DF FE. ſed quadratis quidem ex DE FE æquale eſt [c] ex DE quadratum; etenim rectus eſt angulus EFD: quadratis vero ex CF FE æquale eſt [c] quadratum ex CE. [c] 47. primi. ergo rectangulum ſub AD DC, una cum quadrato quod ex CE, eſt æquale quadrato ex ED; æqualis autem eſt CE ipſi EB; rectangulum igitur ſub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale eſt ex ED quadrato. ſed quadrato ex ED æqualia ſunt quadrata [c] ex EB BD, ſiquidem rectus eſt angulus EBD. ergo rectangulum ſub AD DC, una cum quadrato ex EB æquale eſt eis quæ ex EB BD fiunt quadratis. commune auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur ſub AD DC rectangulum quadrato quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, &c. Quod oportebat demonſtrare.

Cor. Hinc ſi à puncto quovis extra circulum aſſumpto, plures lineæ rectæ AB AC circulum ſecantes ducantur; rectangula comprehenſa ſub totis lineis AB AC, & partibus externis AE AF, inter ſe ſunt æqualia. Nam ſi ducatur tangens AD, erit rectangulum ſub BA AE æquale quadrato ex AD; & rectangulum ſub CA AF eidem quadrato ex AD erit æquale. unde rectangula hæc æqualia erunt.

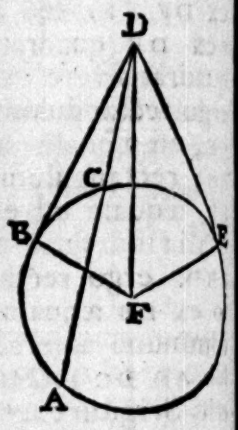


PROP. XXXVII. THEOR.

Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero incidat: ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius aſſumpta inter punctum, & curvam circumferentiam continetur rectangulum, æquale ei quod ab incidente fit quadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim ABC ſumatur aliquod punctum D, atque ab ipſo in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA,

DB; DCA quidem circulum ſecet, DB vero incidat; ſitque rectangulum ſub AD DC æquale quadrato quod fit ex DB. Dico ipſam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim



[a] 17. hujus. recta linea DE [a] contingens circulum ABC, & ſumatur circuli ABC centrum, quod ſit F, junganturque FE FB FD. ergo an-

[b] 18. hujus. gulus FED rectus eſt [b]. & quoniam DE circulum ABC contingit, ſecat autem DCA; rectangulum ſub AD DC æquale

[c] ex antecedente. erit [c] quadrato ex DE. ſed rectangulum ſub AD DC ponitur æquale quadrato ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit. ac propterea linea DE erit ipſi DB æqualis. eſt autem & FE æqualis FB. duæ igitur DE EF duabus DB BF æquales

[d] 8. primi. ſunt; & baſis communis FD; angulus igitur DEF eſt [d] æqualis angulo DBF; rectus autem eſt DEF, ergo & DBF eſt rectus, atque eſt FB producta diameter. quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum con-

[e] Cor. 16. hujus. tingit [e]. ergo DB circulum ABC contingat neceſſe eſt. ſimiliter demonſtrabitur & ſi centrum ſit in ipſa AC. Si igitur extra circulum ſumatur aliquod punctum, &c. Quod demonſtrare oportebat.

EUCLIDIS

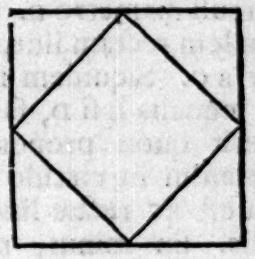
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

I.

FIGURA rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando unusquisque figuræ descriptæ angulus, unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.

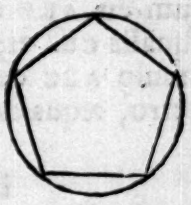


II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

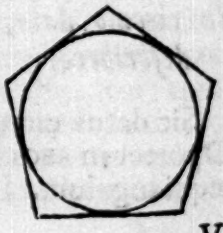
III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando unusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IV.

Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, circuli circumferentiam contingit.



V.

Circulus ſimiliter in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus in qua deſcribitur, contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam deſcribitur, contingit.

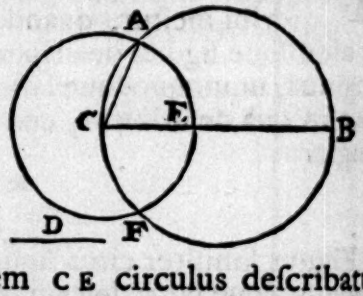
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo, data rectæ lineæ quæ diametro ejus major non ſit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC, data autem recta linea non major circuli diametro D. Oportet in circulo ABC rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC. Siquidem igitur BC ſit æqualis ipſi D, factum jam erit quod proponebatur. etenim in circulo ABC aptata eſt BC rectæ lineæ D æqualis. ſin minus, major eſt BC quam D, ponaturque ipſi D æqualis CE: & centro quidem C intervallo autem CE circulus deſcribatur AEF: & CA jungatur. itaque quoniam punctum C centrum eſt AEF circuli; erit CA ipſi CE æqualis. ſed D eſt æqualis CE. ergo & D ipſi AC æqualis erit. In dato igitur circulo ABC datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis aptata eſt AC. Quod facere oportebat.



a 3. primi.

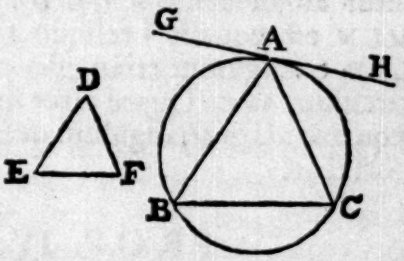
PROP. II. PROBL.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF. Oportet in ABC circulo deſcribere triangulum triangulo DEF æquiangulum. Ducatur recta linea GAH contingens circulum

a 17. tertii.

lum ABC in puncto A: & ad rectam lineam AH, & ad punctum in ea A, angulo DEF æqualis [b] angulus conſtituatur HAC. rurſus ad rectam lineam AG, & ad punctum in ipſa A, angulo DFE æqualis [b] conſtituatur angulus GAB; & BC jungatur. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta HAG; à contactu autem in circulum ducta eſt AC: erit HAC angulus æqualis [c] ei qui in alterno circuli ſegmento conſiſtit, videlicet ipſi ABC. ſed HAC angulus æqualis eſt angulo DEF, ergo & angulus ABC angulo DEF eſt æqualis. eadem ratione & angulus ACB eſt æqualis angulo DFE. reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF æqualis [d] erit. ergo triangulum ABC triangulo DEF eſt æquiangulum, & deſcriptum eſt in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.



[b] 23. primi.

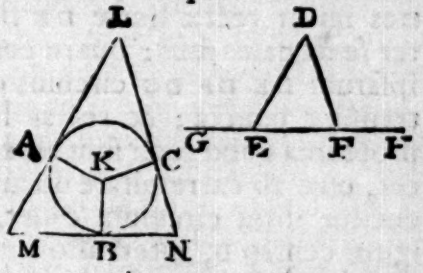
[c] 32. tertii.

[d] 2. Cor. 32. primi.

PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF. Oportet circa circulum ABC deſcribere triangulum triangulo DEF æquiangulum. Protrahatur ex utraque parte EF ad puncta H, G, & ſumatur circuli ABC centrum K: & recta linea KB utcunque ducatur: conſtituaturque ad rectam lineam KB, & ad punctum in ea K, angulo quidem DEG æqualis [a] angulus BKA, angulo autem DFH æqualis [a] angulus BKC, & per A, B, C, puncta ducantur rectæ lineæ LAM MBN MCL circulum ABC contingentes [b]. Quoniam igitur circulum ABC contingunt LM MN NL in punctis A, B, C, à centro autem K ad A B C puncta ducuntur KA KB KC; erunt anguli ad puncta A B C recti [c]. & quoniam quadrilateri AMBK anguli quatuor quatuor rectis æquales ſunt; etenim in duo triangula dividitur, quorum anguli KAM KBM ſunt recti; erunt reliqui AKB AMB duobus rectis æquales. ſunt autem & DEG DEF æquales duobus rectis. anguli igitur AKB AMB angulis DEG DEF



[a] 23. primi.

[b] 17. tertii.

[c, c] 18. tertii.

æquales ſunt, quorum AKB ipſi DEG eſt æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. ſimiliter demonſtrabitur angulus LNB ipſi DFE æqualis. ergo & reliquus MLN eſt æqualis [d] reliquo EDF. æquiangulum igitur eſt LMN triangulum triangulo DEF; & deſcriptum eſt circa circulum ABC. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

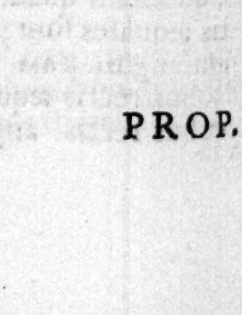
[d] 2. Cor. 32. primi.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum deſcribere.

Sit datum triangulum ABC; Oportet in triangulo ABC circulum deſcribere. Secentur [a] anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD quæ conveniant inter ſe in D puncto: & à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares ducantur [b] DE DF DG. Quoniam angulus EBD eſt æqualis angulo FBD, eſt autem & rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD DBF, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale utrique commune BD, quod ſcilicet uni æqualium angulorum ſubtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia [c] habebunt, atque erit DE æqualis DF. & eadem ratione DG æqualis DF. ergo & DE ipſi DG eſt æqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter ſe æquales ſunt; quare centro D intervallo autem unius ipſarum DE DF DG circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; & rectas lineas AB BC CA continget; propterea quòd recti ſunt ad E F G anguli. ſi enim ipſas ſecet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod eſt abſurdum [d]. non igitur centro D, intervallo autem unius ipſarum DE DF DG circulus deſcriptus ſecabit rectas lineas AB BC CA, quare ipſas continget; atque erit circulus deſcriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.

[a] 9. primi.
[b] 12. primi.
[c] 26. primi.
[d] 16. tertii.

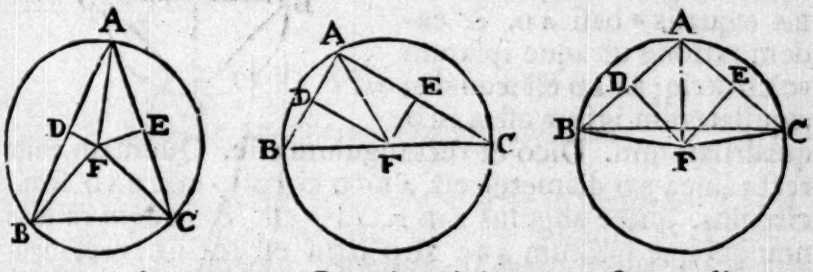


PROP.

PROP. V. PROBL.

Circa datum triangulum circulum deſcribere.

Sit datum triangulum ABC. Oportet circa datum triangulum ABC circulum deſcribere. Secentur AB AC bifariam [a] in D, E punctis: & à punctis D E ipſis AB AC ad rectos angulos [b] ducantur DF EF quæ quidem vel intra triangulum ABC conveniant, vel in recta linea BC, vel extra ipſam. Conveniant primo intra triangulum in puncto F: & [a] 10. primi. [b] 11. primi.



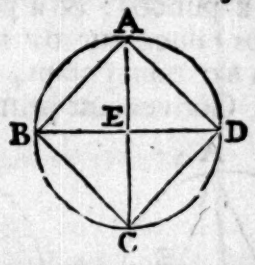
BF FC FA jungantur. Quoniam igitur AD eſt æqualis DB, communis autem & ad rectos angulos DF; erit baſis AF baſi FB æqualis [c]. ſimiliter oſtendetur & CF æqualis FA. ergo & BF eſt æqualis FC. tres igitur FA FB FC inter ſe æquales ſunt. quare centro F, intervallo autem unius ipſarum FA FB FC circulus deſcriptus etiam per reliqua puncta tranſibit: atque erit circulus deſcriptus circa triangulum ABC. & deſcribatur ut ABC. Secundo DF EF conveniant in recta linea BC, in puncto F, ut in ſecunda figura, & AF jungatur. ſimiliter demonſtrabimus punctum F centrum eſſe circuli circa triangulum ABC deſcripti. Poſtremo DF EF conveniant extra triangulum ABC rurſus in F puncto, ut in tertia figura: & jungantur AF FB FC. & quoniam rurſus AD eſt æqualis DB, communis autem & ad rectos angulos DF, baſis AF baſi FB æqualis erit. ſimiliter demonſtrabimus & CF ipſi FA æqualem eſſe. quare & BF eſt æqualis FC. rurſus igitur centro F, intervallo autem unius ipſarum FA FB FC circulus deſcriptus & per reliqua tranſibit puncta; atque erit circa triangulum ABC deſcriptus. Circa datum igitur triangulum circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat. [c] 4. primi.

Cor. Si triangulum ſit rectangulum centrum circuli cadet in latus angulo recto oppoſitum. ſi acutangulum cadet centrum intra triangulum. ſi obtuſangulum cadet extra [a]. [a] 31. tertii.

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum deſcribere.

Sit datus circulus ABCD. Oportet in ABCD circulo quadratum deſcribere. Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter ſe AC BD: & AB BC CD DA jungantur. Quoniam igitur BE eſt æqualis ED, etenim centrum eſt E, communis autem, & ad rectos angulos EA; erit baſis



[a] 4. primi. BA æqualis [a] baſi AD. & eadem ratione utraque ipſarum BC CD utriq; BA AD eſt æqualis; æquilaterum igitur eſt ABCD quadrilaterum. Dico & rectangulum eſſe. Quoniam enim recta linea BD diameter eſt ABCD circuli, erit BAD ſemi-

[b] 31. tertii. circulus. quare angulus BAD rectus [b] eſt. & eadem ratione unuſquiſque ipſorum ABC BCD CDA eſt rectus. rectangulum igitur eſt ABCD quadrilaterum. oſtenſum autem eſt, & æquilaterum eſſe. ergo quadratum neceſſario erit, & deſcriptum eſt in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

PROP. VII. PROBL.

Circa datum circulum quadratum deſcribere.

Sit datus circulus ABCD. Oportet circa ABCD circulum quadratum deſcribere. Ducantur circuli ABCD duæ diametri AC BD ad rectos inter ſe angulos, & per puncta A, B, C, D ducantur circulum ABCD

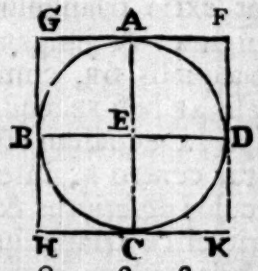
[a] 17. tertii. contingentes [a] FG GH HK KF. Quoniam igitur FG contingit circulum ABCD, à centro autem E ad contactum qui eſt

[b] 18. tertii. ad A ducitur EA; erunt [b] anguli ad A recti. eadem ratione, & anguli ad puncta B, C, D recti ſunt. & quoniam angulus AEB rectus eſt, eſt autem &

[c] 28. primi. rectus EBG; erit GH ipſi AC parallela [c]. eadem ratione, & AC parallela eſt FK. ſimiliter demonſtrabimus & utramque ipſarum GF HK ipſi BED parallelam eſſe. quare & GF eſt

[d] 30. primi. parallela HK. [d] parallelogramma igitur ſunt GK GC AK FB

[e] 34. primi. BK, ac propterea GF quidem eſt [e] æqualis HK, GH vero ipſi FK. & quoniam AC æqualis eſt BD; ſed AC quidem utrique



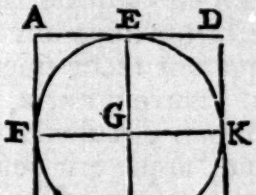
ipſa-

ipſarum GH FK eſt [d] æqualis; BD vero æqualis utrique GF HK, & utraque GH FK utrique GF HK æqualis erit. æquilaterum igitur eſt FGHK quadrilaterum. Dico & rectangulum eſſe. Quoniam enim parallelogrammum eſt GBEA, atque eſt rectus AEB angulus, & ipſe AGB rectus erit [e]. Similiter demonſtrabimus angulos etiam ad puncta H K F rectos eſſe. rectangulum igitur eſt quadrilaterum FGHK. demonſtratum autem eſt & æquilaterum. ergo quadratum ſit neceſſe eſt, & deſcriptum eſt circa circulum ABCD. Circa datum igitur circulum quadratum deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

PROP. VIII. PROBL.

In dato quadrato circulum deſcribere.

Sit datum quadratum ABCD. Oportet in quadrato ABCD circulum deſcribere. Secetur utraque ipſarum AB AD bifariam [a] in punctis F, E. & per E quidem alterutri ipſarum AB CD parallela [b] ducatur EH: per F vero ducatur FK parallela [b] alterutri AD BC. parallelogrammum igitur eſt unumquodque ipſorum AK KB AH HD AG GC BG GD: & latera ipſorum quæ ex oppoſito, ſunt æqualia [c]. Et quoniam DA eſt æqualis AB; & ipſius quidem AD dimidium eſt AE; ipſius vero AB dimidium AF; erit AE ipſi AF æqualis. quare & oppoſita latera æqualia ſunt. ergo FG eſt æqualis GE. ſimiliter demonſtrabimus, & utramque ipſarum GH GK utrique FG GE æqualem eſſe. quatuor igitur GE GF GH GK inter ſe ſunt æquales. itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum GE GF GH GK circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DA continget; propterea quod anguli ad E, F, H, K, recti ſunt: ſi enim circulus ſecabit rectas lineas AB BC CD DA, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet; quod [d] eſt abſurdum. non igitur centro quidem G intervallo autem unius ipſarum GE GF GH GK circulus deſcriptus rectas lineas AB BC CD DA ſecabit. quare ipſas neceſſario continget; atque erit deſcriptus in quadrato ABCD. In dato igitur quadrato circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.



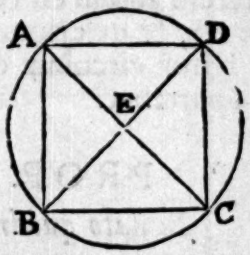
[a] 10. primi.
[b] 31. primi.
[c] 34. primi.
[d] 16. tertii.

PROP.

PROP. IX. PROBL.

Circa datum quadratum circulum deſcribere.

Sit datum quadratum ABCD. Oportet circa ABCD quadratum circulum deſcribere. Jungantur AC BD, quæ ſe invicem in puncto E ſecent. Et quoniam DA eſt æqualis AB, communis autem AC; duæ DA AC duabus BA AC æquales ſunt; & baſis DC æqualis baſi BC; erit angulus DAC angulo BAC æqualis [a]. angulus igitur DAB bifariam ſectus eſt recta linea AC. ſimiliter demonſtrabimus unumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC DB bifariam ſectum eſſe. quoniam igitur angulus DAB angulo ABC eſt æqualis, atque eſt anguli quidem DAB dimidium angulus EAB, anguli vero ABC dimidium EBA; & EAB angulus angulo EBA æqualis erit. quare & latus EA lateri EB eſt [b] æquale. ſimiliter demonſtrabimus & utramque rectarum linearum EC ED utrique EA EB æqualem eſſe. ergo quatuor rectæ lineæ EA EB EC ED inter ſe ſunt æquales. centro igitur E, intervallo autem unius ipſarum EA EB EC ED circulus deſcriptus etiam per reliqua puncta tranſibit; atque erit deſcriptus circa ABCD quadratum. deſcribatur ut ABCD. Circa datum igitur quadratum circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.



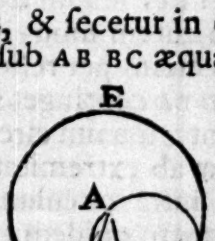
[a] 8. primi.

[b] 6. primi.

PROP. X. PROBL.

Iſoſceles triangulum conſtituere, habens utrumque angulorum qui ſunt ad baſim, duplum reliqui.

Exponatur recta quædam linea AB, & ſecetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum ſub AB BC æquale [a] ſit ei, quod ex CA deſcribitur, quadrato: & centro quidem A, intervallo autem AB circulus deſcribatur BDE; apteturque in BDE circulo recta linea BD æqualis [b] ipſi AC quæ non eſt major diametro circuli BDE: & junctis DA DC, circa ADC triangulum [c] circulus ACD deſcribatur. itaque quoniam rectangulum AB BC æquale eſt quadrato quod fit ex AC;



[a] 11. ſecundi.

[b] 1. hujus.

[c] 5. hujus.

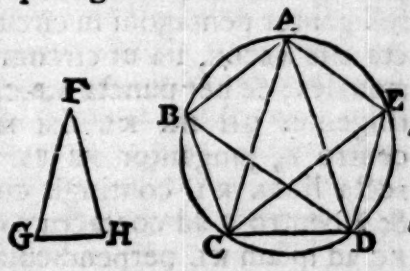
AC; æqualis autem eſt AC ipſi BD; erit ſub AB BC rectangulum quadrato ex BD æquale. & quoniam extra circulum ACD ſumptum eſt aliquod punctum B, & à puncto B in circulum ACD cadunt duæ rectæ lineæ BCA BD, quarum altera quidem ſecat, altera vero incidit; atque eſt rectangulum ſub AB BC æquale quadrato ex BD: recta linea BD circulum ACD *d* continget. quoniam igitur BD contingit, & à contacta ad D ducta eſt DC; erit BDC angulus æqualis *e* ei qui in alterno circuli ſegmento conſtituitur, videlicet angulo DAC. quod cum angulus BDC æqualis ſit ipſi DAC, communis apponatur CDA; totus igitur BDA eſt æqualis duobus angulis CDA DAC. ſed ipſis CDA DAC exterior angulus BCD eſt *f* æqualis. ergo & BDA æqualis eſt ipſi BCD. ſed BDA angulus eſt *g* æqualis angulo CBD, quoniam & latus AD lateri AB eſt æquale. ergo & DBA ipſi BCD æqualis erit. tres igitur anguli BDA DBA BCD inter ſe æquales ſunt. & quoniam angulus DBC æqualis eſt angulo BCD, & latus BD lateri DC eſt *h* æquale. ſed BD ponitur æqualis ipſi CA. ergo & CA eſt æqualis CD. quare & angulus CDA æqualis eſt angulo DAC. anguli igitur CDA DAC ſimul ſumpti ipſius anguli DAC duplices ſunt. eſt autem & BCD angulus angulis CDA DAC æqualis; ergo & BCD duplex eſt ipſius DAC. ſed BCD eſt æqualis alterutri ipſorum BDA DBA. quare & uterque BDA DBA ipſius DAB eſt duplex. Iſoſceles igitur triangulum conſtitutum eſt ADB habens utrumque eorum angulorum qui ſunt ad baſim, duplum reliqui. Quod facere oportebat.

d 37. tertii.
e 32. tertii.
f 32. primi.
g 5. primi.
h 6. primi.

PROP. XI. PROBL.

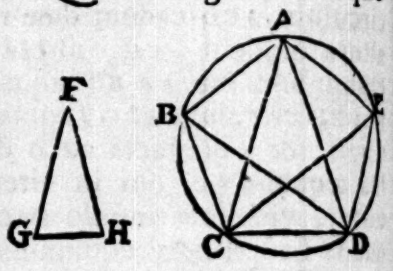
In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCDE. Oportet in ABCDE circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Exponatur triangulum iſoſceles FGH habens utrumque eorum qui ſunt ad baſim GH angulorum, duplum *a* anguli qui eſt ad F: & deſcribatur in circulo ABCDE triangulo FGH æquiangulum *b* triangulum ACD, ita ut angulo quidem qui eſt ad F æqualis ſit angulus CAD; utrique vero ipſorum qui ad G H, ſit æqualis uterque ACD CDA. & uterque



a 10 hujus.
b 2. hujus.

uterque igitur ACD CDA anguli CAD eſt duplus. ſecetur
c 9. primi. uterque ipſorum ACD CDA bifariam c rectis lineis CE DB: & AB BC DE EA jungantur. Quoniam igitur uterque ipſorum ACD CDA duplus eſt ipſius CAD, & ſecti ſunt bifariam rectis lineis CE DB, quinque anguli DAC ACE ECD CDB BDA inter ſe ſunt æquales. æquales autem anguli in æqualibus circumfe-
d 26. tertii. rentiis inſiſtunt d. quinque igitur circumferentiæ AB BC CD DE EA æquales ſunt in-
e 29. tertii. ter ſe. ſed æquales circumferentias e æquales rectæ lineæ ſubtendunt. ergo & quinque rectæ lineæ AB BC CD DE EA inter ſe æquales ſunt. æquilaterum igitur eſt ABCDE pentagonum. Dico & æquiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia AB æqualis eſt circumferentiæ DE, communis apponatur BCD. tota igitur ABCD circumferentia toti circumferentiæ EDCB eſt æqualis, & in circumferentia quidem ABCD inſiſtit angulus AED, in circumferentia vero EDCB inſiſtit BAE. ergo & BAE angulus eſt æqualis an-
f 27. tertii. gulo AED f. eadem ratione & unuſquiſque angulorum ABC BCD CDE unicuique ipſorum BAE AED eſt æqualis. æquiangulum igitur eſt ABCDE pentagonum: oſtenſum autem eſt & æquilaterum eſſe. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

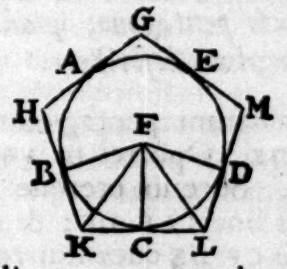


PROP. XII. PROBL.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCDE. Oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Intelligantur pentagoni in circulo deſcripti a angulorum puncta eſſe ABCDE, ita ut circumferentiæ AB BC CD DE EA ſint
a per 11. hujus.
b 17. tertii. æquales; & per puncta A,B,C,D,E, ducantur b circulum contingentes GH HK KL LM MG, & ſumpto circuli ABCDE centro F, jungantur FB FK FC FL FD. Quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto C, & à centro F ad contactum qui eſt ad C ducta eſt FC, erit
c 18. tertii. FC ad ipſam KL perpendicularis c. rectus igitur eſt uterque angulorum qui ſunt ad C. eadem ratione & anguli qui ad puncta B D recti ſunt. & quoniam rectus angulus eſt FCK, quadra-

quadratum quod fit ex FK æquale *d* eſt quadratis ex FC CK. & ob eandem cauſam quadratis ex FB BK æquale eſt ex FK quadratum. quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK æqualia ſunt, quorum quod ex FC ei quod ex FB eſt æquale. ergo reliquum quod ex CK reliquo quod ex BK æquale erit. æqualis igitur eſt BK ipſi CK. & quoniam FB eſt æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK æquales ſunt; & baſis BK eſt æqualis baſi KC; erit angulus *e* itaque BFK angulo KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur eſt angulus BFC anguli KFC, & angulus BKC duplus ipſius FKC. eadem ratione, & angulus CFD anguli CFL eſt duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CD eſt æqualis, & angulus BFC angulo CFD æqualis *f* erit. atque eſt angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipſius LFC. æqualis igitur eſt angulus KFC angulo CFL. itaque duo triangula ſunt FKC FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale quod ipſis commune eſt FC: ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt *g*, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea KC eſt æqualis rectæ CL, & angulus FKC angulo FLC. & quoniam KC eſt æqualis CL, erit KL ipſius KC dupla. eadem ratione, & HK ipſius BK dupla oſtendetur. rurſus quoniam BK oſtenſa eſt æqualis ipſi KC, atque eſt KL quidem dupla KC, HK vero ipſius BK dupla: erit HK ipſi KL æqualis. ſimiliter & unaquæque ipſarum GH GM ML oſtendetur æqualis utrique HK KL. æquilaterum igitur eſt GHKLM pentagonum. Dico etiam æquiangulum eſſe. Quoniam enim angulus FKC eſt æqualis angulo FLC; & oſtenſus eſt angulus HKL duplus ipſius FKC; ipſius vero FLC duplus KLM: erit & HKL angulus angulo KLM æqualis. ſimili ratione oſtendetur & unuſquiſque ipſorum KHG HGM GML utrique HKL KLM æqualis. quinque igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter ſe æquales ſunt. Ergo æquiangulum eſt GHKLM pentagonum. oſtenſum autem eſt etiam æquilaterum eſſe: & deſcriptum eſt circa ABCDE circulum. Quod facere oportebat.



d 47. primi.

e 8. primi.

f 27. tertii.

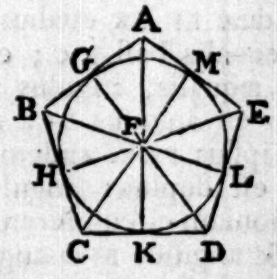
g 26. primi.

PROP.

PROP. XIII. PROBL.

In dato pentagono, quod æquilaterum & æquiangulum ſit, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. Oportet in ABCDE pentagono circulum deſcribere. Secetur uterque angulorum BCD CDE bifariam rectis lineis CF DF; & à puncto F in quo conveniunt inter ſe CF DF ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC eſt æqualis CD, communis autem CF, duæ BC CF, duabus DC CF æquales ſunt, & angulus BCF eſt æqualis angulo DCF. baſis igitur BF baſi FD eſt æqualis, & BFC triangulum æquale triangulo DCF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. & quoniam angulus CDE anguli CDF eſt duplus, & angulus quidem CDE angulo ABC æqualis, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit & CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo CBF æqualis. angulus igitur ABC bifariam ſectus eſt recta linea BF. ſimiliter demonſtrabitur unumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam ſectum eſſe. à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur perpendiculares FG FH FK FL FM. & quoniam angulus HCF eſt æqualis angulo KCF; eſt autem & rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune ſcilicet utriſque FC, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur. ergo & reliqua lateri reliquis lateribus æqualia habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK æqualis. ſimiliter oſtendetur & unaquæque ipſarum FL FM FG æqualis utrique FH FK. quinque igitur rectæ lineæ FG FH FK FL FM inter ſe æquales ſunt. quare centro F intervallo autem unius ipſarum FG FH FK FL FM, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DE EA continget; propterea quod anguli ad GHKLM recti ſunt. ſi enim non continget, ſed ipſas ſecet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet, quod abſurdum eſſe oſtenſum eſt. non igitur centro F, & inter-



a 9. primi.
b 4. primi.
c 12. primi.
d 26. primi.
e 16. tertii.

intervallo uno ipſorum punctorum GHKLM circulus deſcriptus rectas lineas AB BC CD DE EA ſecabit. quare ipſas contingat neceſſe eſt. deſcribatur ut GHKLM. In dato igitur pentagono quod eſt æquilaterum, & æquiangulum circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.

Cor. Si duo anguli proximi figuræ æquilateræ & æquiangulæ biſecentur, & à puncto in quo ceeunt lineæ angulum biſecantes, ducantur rectæ lineæ ad reliquos figuræ angulos, omnes anguli figuræ erunt biſecti.

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum quod æquilaterum & æquiangulum ſit, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. Oportet circa pentagonum ABCDE circulum deſcribere. Secetur uterque ipſorum BCD CDE angulorum bifariam [a] rectis lineis CF FD: & à puncto F in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B A E ducantur FB FA FE. & unuſquiſque angulorum CBA BAE AED rectis lineis BF FA FE bifariam [b] ſectus erit. Et quoniam angulus BCD angulo CDE eſt æqualis; atque eſt anguli quidem BCD dimidium angulus FCD, anguli vero CDE dimidium CDF; erit & FCD angulus æqualis angulo FDC, quare & latus CF lateri FD eſt æquale [c]. ſimiliter demonſtrabitur & unaquæque ipſarum FB FA FE æqualis unicuique FC FD. quinque igitur rectæ lineæ FA FB FC FD FE inter ſe æquales ſunt. ergo centro F, & intervallo unius ipſorum FA FB FC FD FE, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta: atque erit deſcriptus circa pentagonum ABCDE quod æquilaterum eſt & æquiangulum. deſcribatur, & ſit ABCDE. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.

[a] 9. primi.

[b] Cor. præcedente.

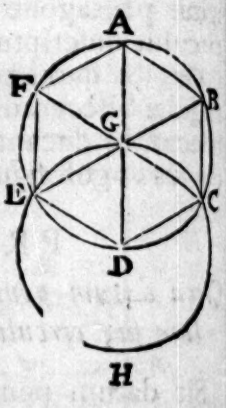
[c] 6. primi.

PROP. XV. PROBL.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCDEF. Oportet in circuli ABCDEF hexagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Ducatur

catur circuli ABCDEF diameter AD, ſumaturque centrum circuli G; & centro quidem D, intervallo autem DG circulus deſcribatur EGCH, junctæ EG CG ad puncta E F producantur, & jungantur AB BC CD DE EF FA. Dico hexagonum ABCDEF æquilaterum & æquiangulum eſſe. Quoniam enim G punctum centrum eſt ABC DEF circuli, erit GE ipſi GD æqualis. rurſus quoniam D centrum eſt circuli EGCH, erit DE æqualis DG: ſed GE ipſi GD æqualis oſtenſa eſt. ergo GE ipſi ED eſt æqualis. æquilaterum igitur eſt EGD triangulum, ideoque tres ipſius anguli EGD GDE DEG inter ſe æquales [a] ſunt; & ſunt trianguli tres anguli æquales [b] duobus rectis. angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars eſt. ſimiliter oſtendetur & DGC duorum rectorum tertia pars. & quoniam recta linea CG ſuper rectam EB inſiſtens, angulos qui deinceps ſunt EGC CGB duobus rectis æquales [c] efficit; erit & reliquus CGB tertia pars duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGB inter ſe ſunt æquales. & qui ipſis ad verticem ſunt anguli BGA AGF FGE æquales [d] ſunt angulis EGD DGC CGB. quare ſex anguli EGD DGC CGB BGA AGF FGE inter ſe æquales ſunt. ſed æquales anguli æqualibus circumferentiis inſiſtunt [e]. ſex igitur circumferentiæ AB BC CD DE EF FA inter ſe ſunt æquales: æquales autem circumferentias æquales [f] rectæ lineæ ſubtendunt. ergo & ſex rectæ lineæ inter ſe æquales ſint neceſſe eſt. ac propterea æquilaterum eſt ABCDEF hexagonum. Dico & æquiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia AF circumferentiæ ED eſt æqualis, communis apponatur circumferentia ABCD: tota igitur FABCD circumferentia æqualis eſt toti circumferentiæ EDCBA. & circumferentiæ quidem FABCD angulus FED inſiſtit, circumferentiæ vero EDCBA inſiſtit angulus AFE. angulus igitur AFE angulo DEF eſt [g] æqualis. ſimiliter oſtendentur & reliqui anguli hexagoni ABCDEF ſigillatim æquales utrique ipſorum AFE FED. ergo æquiangulum eſt ABCDEF hexagonum. oſtenſum autem eſt & æquilaterum eſſe: & deſcriptum eſt circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.



Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus, ei quæ eſt ex centro circuli æquale eſſe. & ſi per puncta ABCDFF contingentes circulum ducamus, circa circulum deſcribetur hexa-

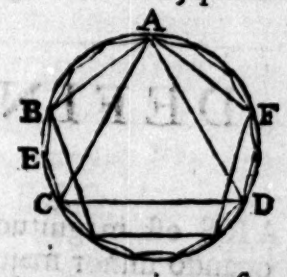
[a] Cor. 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] 13. primi.
[d] 15. primi.
[e] 26. tertii.
[f] 29. tertii.
[g] 27. tertii.

hexagonum æquilaterum & æquiangulum, conſequenter iis quæ in pentagono dicta ſunt: & præterea ſimiliter in dato hexagono circulum inſcribemus, & circumſcribemus. Quod facere oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCD. Oportet in ABCD circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Sit AC latus trianguli [a] quidem æquilateri in ipſo circulo ABCD [a] 2. hujus. *deſcripti, pentagoni [b] vero æquilateri latus AB, quarum igi- [b] 11. hujus. tur partium eſt ABCDF circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABC, tertia exiſtens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB, quæ quinta eſt circuli, erit trium. ergo reliqua BC eſt duarum. ſecetur BC bifariam in puncto E [c]. quare utraque ipſarum BE EC circumferentia- [c] 30. tertii. rum quintadecima pars eſt ABCD circuli. ſi igitur jungentes BE EC, æquales ipſis in continuum rectas lineas in circulo [d] ABCD aptemus, in ipſo quindecagonum æquilate- [d] 1. hujus. rum & æquiangulum deſcriptum erit. Quod facere oportebat.



Similiter autem iis quæ dicta ſunt in pentagono, ſi per circuli diviſiones, contingentes circulum ducamus, circa ipſum deſcribetur quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. & inſuper dato quindecagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribemus, & circumſcribemus.

---

* *Facilimè deſcribitur latus* AC *per prop. præced. ſi enim duo latera hexagoni circulo inſcribantur ab* A *verſus* C, *horum oppoſita extrema incident in puncta* A, C *extrema lateris trianguli quæſiti.*

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

Multiplex est major minoris, quando majorem minor metitur.

III.

Proportio seu ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis, secundum quantitatem, mutua quædam habitudo.

IV.

Proportionem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se invicem superare possunt.

V.

In eadem proportione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, secundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà superant, vel unà æquales sunt, vel unà deficiunt, inter se comparatæ.

VI.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

Ea magnitudinum Proportionalium definitio vulgo apud Interpretes traditur, quam Euclides in Elemento ſeptimo, pro numeris ſolum poſuit. ſcil.

Magnitudines dicuntur eſſe proportionales, quando Prima Secundæ & Tertia Quartæ æquemultiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes.

Sed hæc definitio Numeris & quantitatibus commenſurabilibus tantum competit; Adeoque cum Univerſalis non ſit, recte ab Euclide in hoc elemento omnium Proportionalium proprietates traditurore-jicitur; & alia generalis ſubſtituitur cuivis magnitudinum ſpeciei congruens. Interim multum laborant Interpretes ut Definitionem hîc loci ab Euclide expoſitam, ex vulgo recepta numerorum Proportionalium definitione demouſtrent; ſed facilius multo hæc ab illa fluit quam illa ab hac. Quod ſic oſtendetur.

Primo *Sint* ABCD *quatuor magnitudines quæ ſunt in eadem ratione; prout in definitione 5ta magnitudines in eadem ratione eſſe exponuntur. Sitque Prima multiplex ſecundæ, dico & tertiam eandem eſſe multiplicem Quartæ. Sit ex gr.* A *æqualis* 5 B, *erit* C *æqualis* 5 D. *Capiatur numerus quilibet v. gr.* 2. *per quem multiplicetur* 5 *& productus ſit* 10: *Et magnitudinum* A *&* C *Primæ & Tertiæ capiantur æque multiplices* 2A, 2C. *Item magnitudinum* B *&* D *Secundæ & Quartæ capiantur æque multiplices* 10B, *&* 10D. *Et per defin. quintam, ſi* 2A *ſint æquales* 10B, *erunt* 2C. *æquales* 10D. *at quia* A *eſt quintuplex ex hypotheſi ipſius* B, *erunt* 2A *æquales* 10B. *unde &* 2C *æquales* 10D. *&* C *æqualis* 5D, *hoc eſt erit* C *quintuplex ipſius* D. *q. e. d.*

A: B:: C: D
2A 10B 2C 10D

Secundo. *Si* A *ſit pars quævis ipſius* B, *erit* C *eadem pars ipſius* D. *Nam quia eſt* A *ad* B, *ſicut* C *ad* D. *cumque* A *ſit pars quædam ipſius* B, *erit* C *multiplex ipſius* A; *adeoque per priorem caſum erit eadem multiplex ipſius* C, *& proinde* C *eadem pars erit magnitudinis* D, *ac eſt* A *ipſius* B. *q. e. d.*

Tertio. *Sit* A *æqualis quotlibet quarumvis partium ipſius* B. *dico &* C *eſſe æqualem totidem ſimilium partium ipſius* D. *v. gr.* A *in ſe contineat quartam partem ipſius* B *quinquies; hoc eſt, ſit* A *æqualis* $\frac{5}{4}$B, *dico &* C *eſſe æqualem* $\frac{5}{4}$D. *Nam quoniam* A *eſt æqualis* $\frac{5}{4}$B; *multiplicando utramque per* 4, *erunt* 4A *æquales* 5B. *Capiantur itaque æque multiplices Primæ & Tertiæ ſcil.* 4A *&* 4C; *item aliæ æque multiplices Secundæ & Quartæ ſcil.* 5B 5D. *& per definitionem, ſi* 4A *ſint æquales* 5B, *erunt* 4C *æquales* 5D. *at oſtenſum eſt* 4A *æquales eſſe* 5B. *adeoque &* 4C *æquales erunt* 5D, *&* C *æqualis* $\frac{5}{4}$D. *q. e. d.*

A: B:: C: D.
4A 5B 4C 5D

Univerſaliter ſit A *æqualis* $\frac{n}{m}$B, *erit* C *æqualis* $\frac{n}{m}$D. *multiplicentur enim* A *&* C *per* m. *Et* B *&* D *per* n. *Et quoniam eſt* A *æqualis* $\frac{n}{m}$B, *erit* mA *æqualis* nB; *unde per def.* 5tam *erit* mC *æqualis* nD; *&* C *æqualis* $\frac{n}{m}$D. *q. e. d.*

A: B:: C: D.
mA nB mC nD

VII.

VII.

Quando autem æque multiplicium, multiplex quidem primæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ, multiplex vero tertiæ non ſuperaverit multiplicem quartæ, tunc prima ad ſecundam majorem proportionem habere dicitur quam tertia ad quartam.

VIII.

Analogia eſt proportionum ſimilitudo.

IX.

Analogia vero in tribus terminis ad minimum conſiſtit.

X

Quando tres magnitudines proportionales ſunt, prima ad tertiam, duplicatam proportionem habere dicetur ejus quàm habet ad ſecundam.

XI.

Quando autem quatuor magnitudines ſunt proportionales, prima ad quartam, triplicatam habere proportionem dicetur ejus quam habet ad ſecundam, & ſemper deinceps, una amplius, quoad analogia proceſſerit.

XII.

Homologæ, vel ſimilis rationis magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

XIII.

Alterna ſeu permutata ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

XIV.

Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad conſequentem.

XV.

Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis unà cum conſequente, tanquam unius, ad ipſam conſequentem.

XVI.

Diviſio rationis eſt ſumptio exceſſus quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

XVII.

Converſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

XVIII.

Ex æquo ſive ex æqualitate ratio eſt, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur & in eadem proportione, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in ſecundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, eſt ſumptio extremarum per ſubtractionem mediarum.

XIX.

Ordinata proportio eſt, quando fuerit ut antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; ut autem conſequens ad aliam quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero proportio eſt, quando tribus exiſtentibus magnitudinibus, & aliis ipſis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliam quampiam, ita in ſecundis alia quæpiam ad antecedentem.

AXIOMATA.

I.

Ejuſdem ſive æqualium æque multiplices inter ſe æquales ſunt.

II.

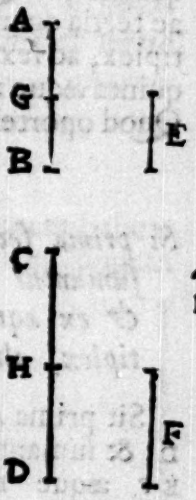
Quarum eadem æque multiplex eſt, vel quarum æquales ſunt æque multiplices, & ipſæ inter ſe ſunt æquales.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices; quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB CD, quotcunque magnitudinum E F, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque

multiplices. Dico quotuplex eſt AB ipſius E, totuplices eſſe & AB CD ſimul ipſarum E F ſimul. Quoniam enim AB æque multiplex eſt ipſius E, ac CD ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB æquales ipſi E, tot erunt & in CD æquales ipſi F. Dividatur AB quidem in partes ipſi E æquales, quæ ſint AG GB; & CD dividatur in partes æquales ipſi F, videlicet CH HD. erit igitur multitudo partium CH HD æqualis multitudini ipſarum AG GB. & quoniam AG eſt æqualis E, & CH æqualis F; erunt & AG CH æquales [a] ipſis E F. eadem ratione quoniam GB eſt æqualis E, & HD ipſi F; erunt GB HD æquale [a] ipſis E F. quot ſunt itaque in AB æquales ipſi E, tot ſunt & in AB CD æquales ipſis E F. ergo quotuplex eſt AB ipſius E, totuplices erunt & AB CD ſimul ipſarum E F ſimul. Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices; quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium. Quod demonſtrare oportebat.

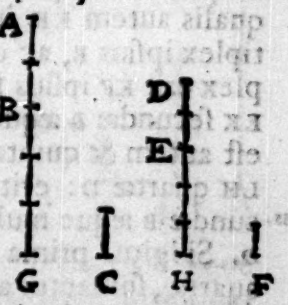


[a] Axiom. 2. primi.

PROP. II. THEOR.

Si prima ſecundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex ac ſexta quartæ; erit etiam compoſita prima cum quinta ſecundæ æque multiplex ac tertia cum ſexta quartæ.

Sit prima AB ſecundæ C æque multiplex, ac tertia DE quartæ F. Sit autem & quinta BG ſecundæ C æque multiplex, ac ſexta EH quartæ F. Dico & compoſitam primam cum quinta ſcil. AG ſecundæ C æque multiplicem eſſe, ac tertiam cum ſexta ſc. DH quartæ F. Quoniam enim AB æque multiplex eſt C, ac DE ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB æquales C, tot erunt & in DE æquales F. eadem ratione & quot ſunt in BG æquales C, tot & in EH erunt æquales F. quot igitur ſunt in tota AG æquales C, tot erunt & in tota DH æquales F. ergo quotuplex ex AG ipſius C, totuplex eſt &



DH

DH ipſius F. & compoſita igitur prima cum quinta AG ſecundæ C æque multiplex erit, ac tertiam cum ſexta DH quartæ F. Quare ſi prima ſecundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, ac ſexta quartæ; erit compoſita quoque prima cum quinta æque multiplex ſecundæ, ac tertia cum ſexta quartæ. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. III. THEOR.

Si prima ſecundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ; ſumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æquali, ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ.

Sit prima A ſecundæ B æque multiplex ac tertia C quartæ D: & ſumantur ipſarum A C æque multiplices EF GH. Dico EF æque multiplicem eſſe ipſius B, ac GH ipſius D. Quoniam enim EF æque multiplex eſt ipſius A, ac GH ipſius C; quot magnitudines ſunt in EF æquales A, tot erunt & in GH æquales C. dividatur EF quidem in magnitudines ipſi A æquales EK KF; GH vero dividatur in magnitudines æquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipſarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipſarum GL LH. & quoniam æque multiplex eſt A ipſius B ac C ipſius D; æqualis autem EK ipſi A, & GL ipſi C; erit EK æque multiplex ipſius B, ac GL ipſius D. eadem ratione æque multiplex erit KF ipſius B, ac LH ipſius D. quoniam igitur prima EK ſecundæ B æque multiplex eſt, ac tertia GL quartæ D; eſt autem & quinta KF ſecundæ B æque multiplex ac ſexta LH quartæ D: erit & compoſita prima cum quinta EF, ſecundæ B æque multiplex [a], ac tertia cum ſexta GH, quartæ D. Si igitur prima ſecundæ æque fuerit multiplex ac tertia quartæ, ſumantur autem primæ & tertiæ æque multiplices: erit & ex æquali, ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ. Quod oſtendiſſe oportuit.

[a] 2. hujus.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habet proportionem quam tertia ad quartam: & æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter ſe comparatæ.

Prima A ad ſecundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: & ſumantur ipſarum quidem A C utcunque æque multiplices E F; ipſarum vero B D aliæ utcunque æque multiplices G H. Dico E ad G ita eſſe ut F ad H. Sumantur rurſus ipſarum E F æque multiplices K L, & ipſarum G H æque multiplices M N. Quoniam igitur E æque multiplex eſt ipſius A, atque F ipſius C; ſumuntur autem ipſarum E F æque multiplices K L: erit K æque multiplex [a] ipſius A, atque L ipſius C. eadem ratione M æque multiplex erit ipſius B, atque N ipſius D. & quoniam eſt ut A ad B ita C ad D. ſumptæ autem ſunt ipſarum A C æque multiplices K L; & ipſarum B D aliæ utcunque æque multiplices M N: ſi [b] K ſuperat M, ſuperabit & L ipſam N; & ſi æqualis æqualis; & ſi minor minor. ſuntque K L quidem ipſarum E F æque multiplices; M N vero ipſarum G H aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur E ad G ita [b] erit F ad H. Quare ſi prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam: & æque multiplices primæ ac tertiæ ad æque multiplices ſecundæ ac quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter ſe comparatæ. Quod demonſtrare oportebat.

[a] 3. hujus.

[b] 5. Defin. hujus.

Quoniam igitur demonſtratum eſt ſi K ſuperat M, & L ipſam N ſuperare; & ſi æqualis, æqualem eſſe, & ſi minor, minorem:

minorem; conſtat etiam ſi M ſuperat K, & N ſuperare ipſam L; & ſi æqualis, æqualem eſſe; & ſi minor, minorem; ac propterea ut G ad E ita eſſe H ad F.

c 5. Defin. hujus.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi quatuor magnitudines ſint proportionales, & inverſe proportionales eſſe.

PROP. V. THEOR.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit atque ablata ablatæ: & reliqua reliquæ æque multiplex erit ac tota totius.

Magnitudo AB magnitudinis CD æque multiplex ſit atque ablata AE ablatæ CF. Dico & reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem eſſe atque totam AB totius CD. Quotuplex enim eſt AE ipſius CF, totuplex fiat & EB ipſius CG. & quoniam AE æque multiplex eſt CF atque EB ipſius CG; erit a AE æque multiplex CF, ac AB ipſius GF; ponitur autem æque multiplex AE ipſius CF, ac AB ipſius CD. æque multiplex igitur eſt AB utriuſque GF CD; ac propterea GF ipſi CD eſt b æqualis. communis auferatur CF. reliqua igitur GC æqualis eſt reliquæ DF. itaque quoniam AE æque multiplex eſt CF, ac EB ipſius CG, eſtque CG æqualis DF; erit AE æque multiplex CF, ac EB ipſius FD. æque multiplex autem ponitur AE ipſius CF, ac AB ipſius CD. ergo EB eſt æque multiplex FD, ac AB ipſius CD. & reliqua igitur EB reliquæ FD æque multiplex eſt, atque tota AB totius CD. Quare ſi magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit atque ablata ablatæ: & reliqua reliquæ æque erit multiplex, ac tota totius. Quod oportebat demonſtrare.

a 1. hujus.

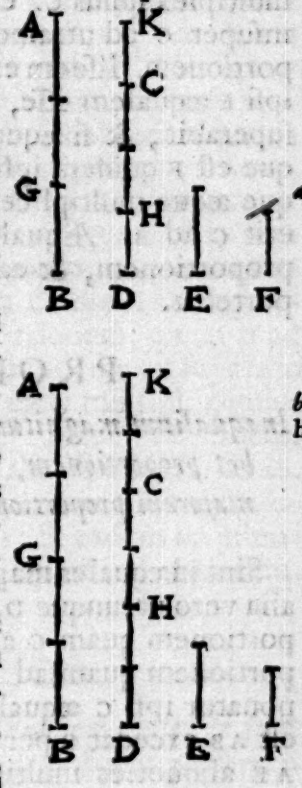
b 2. Axiom. hujus.

PROP. VI. THEOR.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices ſint, & ablatæ quædam ſint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ vel eiſdem æquales, vel ipſarum æque multiplices.

Duæ magnitudines AB CD duarum magnitudinum EF æque multiplices ſint, & ablatæ AG CH earundem ſint æque multiplices. Dico & reliquas GB HD vel ipſis E F æquales eſſe,

eſſe, vel ipſarum æque multiplices. Sit enim primo GB æqualis E. Dico & HD ipſi F eſſe æqualem. Ponatur ipſi F æqualis CK. & quoniam AG æque multiplex eſt E ac CH ipſius F; eſtque GB quidem æqualis E; CK vero æqualis F; erit AB æque multiplex [a] E, ac KH ipſius F. æque autem multiplex ponitur AB ipſius E, ac CD ipſius F. ergo KH æque multiplex eſt F, ac CD ipſius F. quoniam igitur utraque ipſarum KH CD eſt æque multiplex F, erit KH æqualis [b] CD. communis auferatur CH. ergo reliqua KC reliquæ HD eſt æqualis. ſed KC eſt æqualis F. & HD igitur ipſi F eſt æqualis; ideoque GB ipſi E, & HD ipſi F æqualis erit. Similiter demonſtrabimus ſi GB multiplex fuerit ipſius E; & HD ipſius F æque multiplicem eſſe. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices ſint, & ablatæ quædam ſint earundem æque multiplices; erunt & reliquæ, vel eiſdem æquales, vel ipſarum æque multiplices. Quod demonſtrare oportebat.



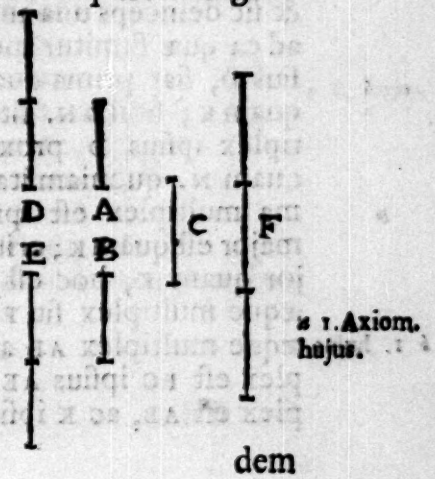
[a] 2. hujus.

[b] 1. Axiom. hujus.

PROP. VII. THEOR.

Æquales ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A B, alia autem quævis magnitudo C. Dico utramque ipſarum A B ad C eandem proportionem habere: & C ad utramque A B ſimiliter eandem habere proportionem. Sumantur ipſarum A B æque multiplices D E, & ipſius C alia utcunque multiplex F. Quoniam igitur æque multiplex eſt D ipſius A, ac E ipſius B, eſtque A ipſi B æqualis; erit & D æqualis [a] E; alia autem utcunque multiplex ipſius C eſt F. ergo ſi D ſuperat F, & E ipſam F ſuperabit, & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. & ſunt D E quidem



[a] 1. Axiom. hujus.

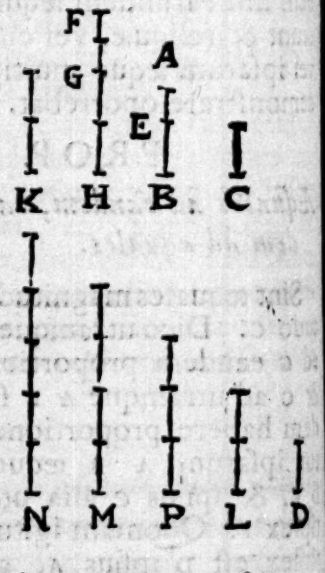
dem ipſarum A B æque multiplices: F vero alia utcunque multiplex ipſius C. erit igitur [b] ut A ad C, ita B ad C. Dico inſuper C ad utramque ipſarum A B eandem habere proportionem. Iiſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus D ipſi E æqualem eſſe, ſi igitur F ſuperat D, ipſam quoque E ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. atque eſt F quidem ipſius C multiplex; D E vero aliæ utcunque æque multiplices ipſarum A B. ergo [b] ut C ad A, ita erit C ad B. Æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales. Quod oſtendere oportebat.

[b] 5. Defin. hujus.

PROP. VIII. THEOR.

Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem habet proportionem, quam minor: & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem.

Sint inæquales magnitudines, AB, C, & ſit AB major. ſit alia vero utcunque D. Dico AB ad D majorem habere proportionem quam C ad D. & D ad C majorem habere proportionem quam ad AB. Quoniam AB major eſt quam C, ponatur ipſi C æqualis B E, hoc eſt AB excedat C per AE. itaque AE aliquoties multiplicata major [a] erit quam D. multiplicetur AE quoad fiat major quam D. ſitque ipſius multiplex FG ipſa D major. quotuplex autem eſt FG ipſius AE, totuplex fiat GH ipſius EB, & K ipſius C. ſumatur etiam ipſius D dupla quidem L, tripla P, & ſic deinceps una amplius, quoad ea quæ ſumitur multiplex ipſius D, fiat prima quæ ſit major quam K; ſit illa N. ſitque M multiplex ipſius D proxime minor quam N. quoniam itaque N prima multiplex eſt ipſius D quæ major eſt quam K; erit M non major quam K, hoc eſt K non erit minor quam M. & cum æque multiplex ſit FG ipſius AE ac GH ipſius EB. erit FG æque multiplex AE ac FH ipſius AB [b]. æque autem multiplex eſt FG ipſius AE ac K ipſius C, ergo FH æque multiplex eſt AB, ac K ipſius C; hoc eſt FH, K ipſarum AB & C



[a] 4. Def. hujus.

[b] 1. hujus.

ſunt

ſunt æque multiplices. rurſus quoniam GH æque multiplex eſt ipſius EB ac K ipſius C, eſtque EB æqualis C, erit & GH ipſi K æqualis [c]. ſed K non minor eſt quam M. non igitur GH minor erit quam M, ſed eſt FG major quam D, ergo tota FH major erit quam M & D. ſed M & D ſimul ſunt æquales ipſi N, quia M eſt multiplex ipſius D ipſi N proxime minor, quare FH major erit quam N. unde cum FH ſuperat N, K vero ipſam N non ſuperat, & ſunt FH & K æque multiplices ipſarum AB & C, & eſt N ipſius D alia multiplex, ergo [d] AB ad D majorem rationem habebit quam C ad D. Dico præterea & D ad C majorem habere proportionem, quam D ad AB. iiſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus N ſuperare K, ipſam vero FH non ſuperare. atque eſt N multiplex ipſius D, & FH K aliæ utcunque ipſarum AB C æque multiplices. ergo D ad C majorem proportionem habet [d], quam D ad AB. Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet proportionem, quam minor: & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem. Quod oſtendere oportebat.

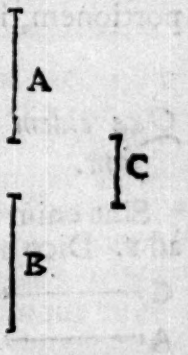
[c] 1. Axiom. hujus.

[d] 7. Defin. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eandem proportionem habent ad eandem, inter ſe ſunt æquales; & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipſæ etiam inter ſe ſunt æquales.

Habeat enim utraque ipſarum A B ad C eandem proportionem. Dico A ipſi B æqualem eſſe. Nam ſi non eſſet æqualis, non haberet [a] utraque ipſarum A B ad eandem, eandem proportionem. habet autem. æqualis igitur eſt A ipſi B. Habeat rurſus C ad utramque ipſarum A B eandem proportionem. Dico A æqualem eſſe ipſi B. niſi enim ita ſit, non [a] habebit C ad utramque A B eandem proportionem. habet autem. ergo A ipſi B neceſſario eſt æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter ſe ſunt: & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipſæ inter ſe ſunt æquales. Quod demonſtrare oportebat.



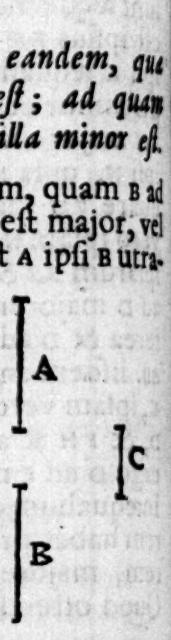
[a] 8. hujus.

PROP.

PROP. X. THEOR.

Magnitudinum proportionem habentium ad eandem, quæ majorem proportionem habet, illa major eſt; ad quam vero eadem majorem habet proportionem, illa minor eſt.

Habeat enim A ad C majorem proportionem, quam B ad C. Dico A quam B majorem eſſe. Si enim non eſt major, vel æqualis eſt, vel minor. æqualis autem non eſt A ipſi B utraque enim ipſarum A B ad C eandem habe-
a 7. hujus. ret a proportionem. atqui eandem non habet. non eſt igitur A ipſi B æqualis. ſed
b 8. hujus. neque minor eſt quam B, haberet b enim A ad C minorem proportionem, quam B. atqui non habet minorem. non igitur A minor eſt, quam B. oſtenſum autem eſt neque eſſe æqualem. ergo A quam B major erit. Habeat rurſus C ad B majorem proportionem quam C ad A. Dico B minorem eſſe quam A. Si enim non eſt minor, vel æqualis eſt, vel major. æqualis utique non eſt

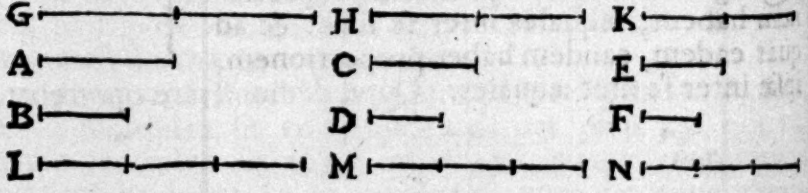


ipſi A, etenim C ad utramque ipſarum A B eandem proportionem a haberet. non habet autem. ergo A ipſi B non eſt æqualis. ſed neque major eſt B quam A, haberet enim C ad B minorem b proportionem quàm ad A. atqui non habet. non eſt igitur B major quam A. oſtenſum autem eſt neque æqualem eſſe. ergo B minor erit quam A. Ad eandem igitur proportionem habentium, quæ majorem proportionem habet, illa major eſt; & ad quam eadem majorem habet proportionem, illa minor eſt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eadem ſunt proportiones, & inter ſe eadem ſunt.

Sint enim ut A ad B ita C ad D: ut autem C ad D ita E ad F. Dico ut A ad B, ita eſſe E ad F. Sumantur enim ipſa-



rum quidem A C E æque multiplices G H K; ipſarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur

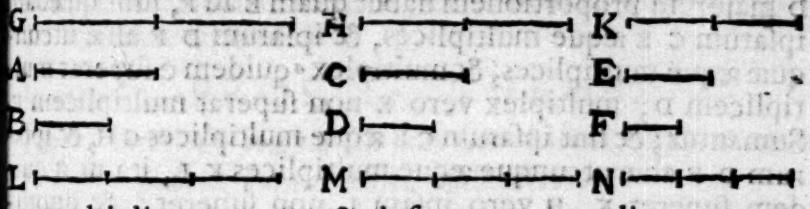
tur eſt ut A ad B, ita C ad D, & ſumptæ ſunt ipſarum A C æque multiplices G H, & ipſarum B D aliæ utcunque æque multiplices L M; ſi [a] G ſuperat L, & H ipſam M ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor minor. rurſus quoniam eſt ut C ad D, ita E ad F, & ſumptæ ſunt ipſarum C E æque multiplices H K, ipſarum vero D F aliæ utcunque æque multiplices M N; ſi [a] H ſuperat M, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſed ſi H ſuperat M, & G ſuperabit L; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor; quare ſi G ſuperat L, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. & ſunt G K quidem ipſarum A E æque multiplices; L N vero ipſarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo [a] ut A ad B, ita erit E ad F Quæ igitur eidem eædem ſunt proportiones, & inter ſe eædem ſunt. Quod oſtendiſſe oportuit.

[a] 5. Def. hujus.

PROP. XII. THEOR.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes conſequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A B C D E F, & ut A ad B, ita ſit C ad D, & E ad F. Dico ut A ad B, ita eſſe A C E ad B D F. Sumantur enim ipſarum A C E æ-



que multiplices G H K, & ipſarum B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur ut A ad B, ita eſt C ad D, & E ad F, & ſumptæ ſunt ipſarum quidem A C E æque multiplices G H K, ipſarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N; ſi [a] G ſuperat L, & H ipſam M ſuperabit, & K ipſam N; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. quare & ſi G ſuperat L, ſuperabunt & G H K ipſas L M N; & ſi æqualis, æquales; & ſi minor, minores. ſuntque G, & G H K ipſarum A, & A C E æque multiplices; quoniam ſi fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices; quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices [b] erunt & omnes omnium. Et eadem ratione L & L M N ipſarum B, & B D F ſunt æque multiplices. eſt igitur [a] ut A ad

[a] 5. Def. hujus.

[b] 1. hujus.

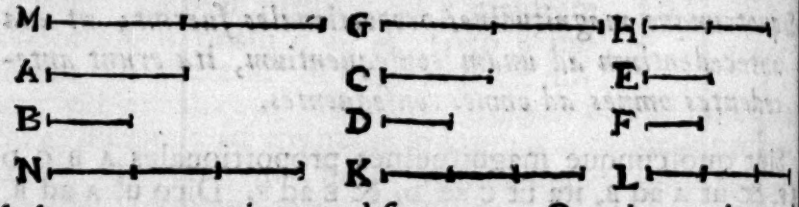
B,

A C E ad B D F. Quare si quotcunque magnitudines proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam majorem proportionem habet quam quinta ad sextam; & prima ad secundam majorem habebit proportionem quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat proportionem quam quinta E ad sextam F. Dico & primam A ad secundam B majorem proportionem



habere, quam quinta E ad sextam F. Quoniam enim C ad D majorem proportionem habet quam E ad F, sunt quædam ipsarum C E æque multiplices, & ipsarum D F aliæ utcunque æque multiplices; & multiplex [a] quidem C superat multiplicem D; multiplex vero E non superat multiplicem F. Sumantur; & sint ipsarum C E æque multiplices G H, & ipsarum D F aliæ utcunque æque multiplices K L, ita ut G quidem superet K, H vero ipsam L non superet: & quotuplex est G ipsius C, totuplex sit & M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit & N ipsius B. & quoniam est ut A ad B ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices M G, & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices N K: si [b] M superat N, & G ipsam K superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed G superat L ergo & M ipsam N superabit. H vero non superat L. sunt que M H ipsarum A E æque multiplices, & N L ipsarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo A ad B majorem proportionem habebit [a] quàm E ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit proportionem quam quinta ad sextam. Quod ostendere oportebat.

[a] 7. Def. hujus.

[b] 5. Def. hujus.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major ſit quam tertia; & ſecunda quam quarta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

Prima enim A ad ſecundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: major autem ſit A quàm C. Dico & B quam D majorem eſſe. Quoniam enim A major eſt quam C, & alia eſt utcunque magnitudo B, habebit [a] A ad B majorem proportionem quàm C ad B; ſed ut A ad B ita C ad D. ergo & C ad D majorem habebit [b] proportionem quàm C ad B. ad quam vero eadem majorem proportionem habet, illa minor [c] eſt. quare D eſt minor quàm B, ac propterea B quam D major erit. ſimiliter demonſtrabimus & ſi A æqualis ſit ipſi C, & B ipſi D eſſe æqualem; & ſi A ſit minor quam C, & B quàm D minorem eſſe. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major ſit quàm tertia, & ſecunda quàm quarta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Quod demonſtrare oportebat.

[a] 8. hujus.
[b] 13. hujus.
[c] 10. hujus.

PROP. XV. THEOR.

Partes inter ſe comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æque multiplices.

Sit enim AB æque multiplex C, ac DE ipſius F. Dico ut C ad F, ita eſſe AB ad DE. Quoniam enim æque multiplex eſt AB ipſius C, ac DE ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB æquales ipſi C, totidem erunt & in DE æquales F. Dividatur AB in magnitudines ipſi C æquales, quæ ſint AG GH HB; & DE dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in DK KL LE; erit igitur ipſarum AG GH HB multitudo æqualis multitudini DK KL LE. & quoniam æquales ſunt AG GH HB, ſuntque DK KL

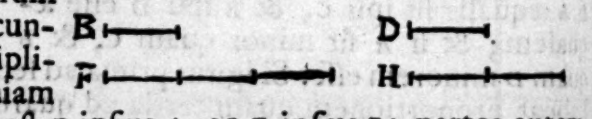
LE inter ſe æquales; ut AG ad DK, ita [a] erit GH ad KL, & [b] HB ad LE. atque erit [b] ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes: eſt igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. ſed AG ipſi C eſt æqualis, & DK ipſi F. ergo ut C ad F, ita erit AB ad DE. Partes igitur inter ſe comparatæ eandem habent proportionem quam habent earum æquæ multiplices. Quod oſtendendum fuit.

[a] 7. hujus.
[b] 12. hujus.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B C D, ſitque ut A ad B, ita C ad D. Dico & permutatas proportionales eſſe, videlicet ut A ad C, ita eſſe B ad D. Sumantur enim ipſarum quidem A B æque multiplices E F, ipſarum vero C D aliæ utcunque æque multiplices G H. Et quoniam æque multiplex eſt E ipſius A, ac F ipſius B: partes autem inter ſe comparatæ eandem habent [a] proportionem quam habent earum æque multiplices; erit ut A ad B ita E ad F. [b] ut autem A ad B ita C ad D. ergo & ut C ad D ita [b] E ad F. rurſus quoniam G H ſunt ipſarum C D æque multiplices, partes autem inter ſe comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æque multiplices; erit [a] ut C ad D ita G ad H. ſed ut C ad D ita E ad F. ergo [b] & ut E ad F ita G ad H. quod ſi quatuor magnitudines proportionales ſint, prima autem major ſit quàm tertia; [c] & ſecunda quam quarta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſi igitur E ſuperat G, & F ipſam H ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor; ſuntque E F ipſarum A B æque multiplices, & G H ipſarum C D aliæ utcunque æque multiplices, ergo [d] ut A ad C ita B ad D. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt. Quod oſtendere oportebat.



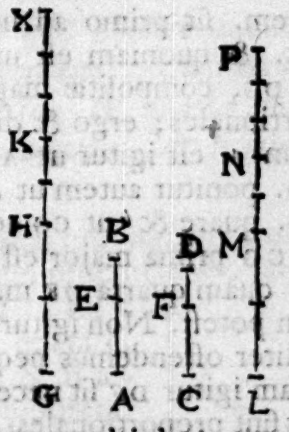
[a] 15. hujus.
[b] 11. hujus.
[c] 14. hujus.
[d] 5. Def. hujus.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & diviſæ proportionales erunt.

Sint compoſitæ magnitudines proportionales AB BE CD DF. Hoc eſt ut AB ad BE, ita ſit CD ad DF. Dico etiam diviſas proportionales eſſe, videlicet ut AE ad EB ita eſſe CF ad FD. Sumantur enim ipſarum quidem AE EB CF FD æque multiplices GH HK LM MN, ipſarum vero EB FD aliæ utcunque æque multiplices KX NP. Quoniam æque multiplex eſt GH ipſius AE, ac HK ipſius EB; erit [a] GH ipſius AE æque multiplex, ac GK ipſius AB. æque autem multiplex eſt GH ipſius AE, ac LM ipſius CF. ergo GK æque multiplex eſt AB, ac LM ipſius CF. rurſus quoniam æque multiplex eſt LM ipſius CF, ac MN ipſius FD; erit [a] LM æque multiplex CF, ac LN ipſius CD. ſed æque multiplex erat LM ipſius CF, ac GK ipſius AB. æque igitur multiplex eſt GK ipſius AB, ac LN ipſius CD. quare GK LN ipſarum AE CD æque multiplices erunt. rurſus quoniam æque multiplex eſt HK ipſius EB, ac MN ipſius FD: eſt autem & KX ipſius EB æque multiplex, ac NP ipſius FD; & compoſita HX ipſius EB æque multiplex eſt [b] ac MP ipſius FD. quare cum ſit ut AB ad BE, ita CD ad DF; & ſumptæ ſint ipſarum quidem AB CD æque multiplices GK LN, ipſarum vero EB FD aliæ utcunque æque multiplices HX MP: ſi [c] GK ſuperat HX, & LN ſuperabit MP; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſuperet igitur GK ipſam HX, communique ablata HK, & GH ipſam KX ſuperabit. ſed ſi GK ſuperat HX, & LN ſuperat MP: itaque ſuperat LN ipſam MP: communique MN ablata, & LM ſuperabit NP. quare ſi GH ſuperat KX, & LM ipſam NP ſuperabit. ſimiliter demonſtrabimus & ſi GH ſit æqualis KX, & LM ipſi NP eſſe æqualem; & ſi minor, minorem. ſunt autem GH LM ipſarum AE CF æque multiplices, & ipſarum EB FD aliæ utcunque æque multiplices KX NP. ergo [c] ut AE ad EB ita erit CF ad FD. Si igitur compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & diviſæ proportionales erunt. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 1. hujus.

[b] 2. hujus.

[c] 5. Def. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si diviſæ magnitudines ſint proportionales, & compoſitæ proportionales erunt.

Sint diviſæ magnitudines proportionales AE EB CF FD: hoc eſt ut AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam compoſitas proportionales eſſe, videlicet ut AB ad BE, ita eſſe CD ad DF. Si enim non eſt ut AB ad BE, ita CD ad DF; erit ut AB ad BE, ita CD vel ad minorem quàm FD, vel ad majorem. ſit primo ad minorem, nempe ad DG. & quoniam eſt ut AB ad BE, ita CD ad DG, compoſitæ magnitudines ſunt proportionales; ergo & diviſæ proportionales

a 17. hujus. erunt a. eſt igitur ut AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur autem ut AE ad EB, ita CF ad

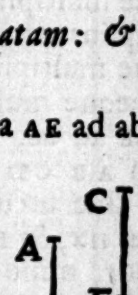
b 11. hujus. FD. quare & b ut CG ad GD, ita CF ad FD. at CG prima major eſt quam tertia CF. ergo & ſecunda

c 14. hujus. DG quàm quarta DF major c erit. ſed & minor, quod fieri non poteſt. Non igitur eſt ut AB ad BE, ita CD ad DG. ſimiliter oſtendemus neque eſſe ad majorem quàm DF. ad ipſam igitur DF ſit neceſſe eſt. Quare ſi diviſæ magnitudines ſint proportionales, & compoſitæ proportionales erunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico & reliquam EB ad reliquam FD ita eſſe ut tota AB ad totam CD. Quoniam enim eſt ut tota AB ad totam CD, ita



a 16. hujus. AE ad CF. & permutando erit a ut AB ad AE, ita CD ad CF. quoniam vero compoſitæ magnitudines ſunt proportionales, & diviſæ

b 17. hujus. proportionales erunt b, ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC: rurſuſque permutando ut a BE ad DF, ita EA ad FC. ſed ut AE ad CF,

c 11. hujus. ita poſita eſt AB ad CD. & reliqua c igitur EB erit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD. Quare ſi fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam. Quod demonſtrare oportebat.

Cor.

Cor. Si quatuor magnitudines proportionales ſint, per converſionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut AB ad BE, ita CD ad DF, erit permutando AB ad CD, ita BE ad DF. quare cum eſt tota AB ad totam CD, ut ablata BE ad ablatam DF, erit & reliqua AE ad reliquam CF, ut tota AB ad totam CD. quare rurſus permutando & invertendo erit ut AB ad AE, ita CD ad CF. quod eſt per converſionem rationis [d] *. [d] 17. Def. hujus.

PROP. XX. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione; ex æquali autem prima major ſit, quam tertia; & quarta quàm ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipſis numero æquales D E F binæ ſumptæ ſint in eadem proportione; ſitque ut A ad B, ita D ad E, & ut B ad C, ita E ad F; ex æquali autem major ſit A quam C. Dico & D quam F majorem eſſe; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem. Quoniam enim A major eſt quàm C, alia vero eſt utcunque B, & major ad eandem majorem habet [a] proportionem quàm minor; habebit A ad B majorem proportionem quam C ad B. ſed ut A ad B, ita D ad E; & invertendo ut C ad B, ita F ad E. ergo & D ad E majorem habet proportionem quam F ad E. ad eandem vero proportionem habentium, quæ majorem habet proportionem, illa major [b] eſt. major igitur eſt D quam F. ſimiliter oſtendemus & ſi A ſit æqualis C, & D ipſi F æqualem eſſe; & ſi minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione: ex æquali autem prima major ſit quam tertia; & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Quod oſtendere oportebat.

[a] 8. hujus.

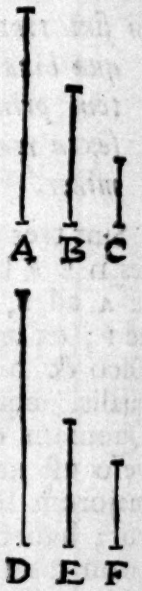
[b] 10. hujus.

* *Hæc eſt magis legitima Demonſtratio Converſionis rationis. Si ſit* AB *ad* BE *ut* CD *ad* DF, *erit, dividendo,* AE *ad* BE *ut* CF *ad* DF: *& invertendo, ut* BE *ad* AE *ita* DF *ad* CF: *&, componendo, erit* AB *ad* AE *ut* CD *ad* CF: *quod eſt per Converſionem Rationis.*

PROP. XXI. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur & in eadem proportione; ſit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima major ſit quam tertia: & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipſis numero æquales D E F, binæ ſumptæ & in eadem proportione. Sit autem perturbata earum analogia, videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; & ex æquali A major ſit quam C. Dico & D quam F majorem eſſe; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem. Quoniam enim major eſt A quam C, alia vero eſt B; habebit [a] A ad B majorem proportionem quam C ad B. ſed ut A ad B, ita E ad F: & invertendo ut C ad B, ita E ad D. quare & E ad F majorem habebit proportionem quam E ad D. ad quam vero eadem majorem proportionem habet illa minor eſt [b]. minor igitur eſt F quam D; ac propterea D quam F major erit. ſimiliter oſtendemus & ſi A ſit æqualis C, & D ipſi F eſſe æqualem; & ſi minor, minorem. Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ ſumantur & in eadem proportione; ſit autem perturbata earum analogia, & ex æquali autem prima major ſit quam tertia: & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 8. hujus.

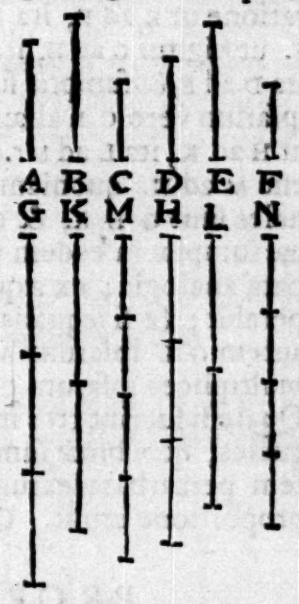
[b] 10. hujus.

PROP. XXII. THEOR.

Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione: & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint quotcunque magnitudines A B C, & aliæ ipſis numero æquales D E F, binæ ſumptæ in eadem proportione, hoc eſt ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. Dico & ex æquali in eadem proportione eſſe, ut A ad C, ita D ad F. Sumantur enim ipſarum quidem A D æque multiplices G H; ipſarum vero B E alia utcunque æque multiplices

plices KL, & ipſarum CF aliæ utcunque æque multiplices MN. Quoniam igitur eſt ut A ad B, ita D ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum A D æque multiplices G H, & ipſarum B E aliæ utcunque æque multiplices K L; erit ut [a] G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. & cum ſint tres magnitudines G K M, & aliæ ipſis numero æquales H L N, binæ ſumptæ & in eadem proportione; ex æquali [b] ſi G ſuperat M, & H ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſuntque G H ipſarum A D æque multiplices, & M N ipſarum C F aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur A ad C, ita erit [c] D ad F. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione: & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 4. hujus.

[b] 20. hujus.

[c] 5. Defin. hujus.

PROP. XXIII. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione; ſit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipſis numero æquales, binæ ſumptæ in eadem proportione, D E F, ſit autem perturbata earum analogia, hoc eſt ſit ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E. Dico ut A ad C, ita eſſe D ad F. Sumantur ipſarum quidem A B D æque multiplices G H L: ipſarum vero C E F aliæ utcunque æque multiplices K M N. Et quoniam G H æque multiplices ſunt ipſarum A B, partes autem eandem habent proportionem quam habent æque

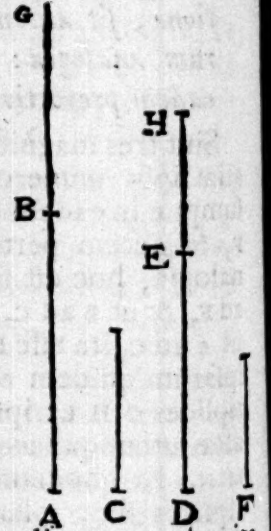
ipſarum multiplices: erit [a] ut A ad B, ita G ad H. & ſimili ratione ut E ad F, ita M ad N. atque eſt ut A ad B, ita E ad F. ut [b] igitur G ad H, ita M ad N. rurſus quoniam eſt ut B ad C ita D ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum B D æque multiplices H L, ipſarum vero C E aliæ utcunque æque multiplices K M: erit ut H ad K, ita L ad M [c]. oſtenſum autem eſt & ut G ad H, ita eſſe M ad N. quoniam igitur tres magnitudines proportionales ſunt G H K, & aliæ ipſis numero æquales L M N, binæ ſumptæ in eadem proportione, eſtque ipſarum perturbata analogia; ex æquali, ſi [d] G ſuperat K, & L ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſunt autem G L ipſarum A D æque multiplices: & K N æque multiplices ipſarum C F. ut igitur [e] A ad C, ita erit D ad F. Quare ſi fuerint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione, ſit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonſtrare oportebat.

[a] 15. hujus. [b] 11. hujus. [c] 4. hujus. [d] 21. hujus. [e] 5. Def. hujus.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad ſecundam proportionem eandem, quam ſexta ad quartam: & compoſita prima cum quinta ad ſecundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum ſexta ad quartam.

Prima AB ad ſecundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F; habeat autem & quinta BG ad ſecundam C proportionem eandem quam ſexta EH ad quartam F: Dico & compoſitam primam cum quinta AG ad ſecundam C eandem proportionem habere, quam tertiam cum ſexta DH ad quartam F. Quoniam enim eſt ut BG ad C, ita EH ad F; erit invertendo ut C ad BG, ita F ad EH. & quoniam ut AB ad C, ita eſt DE ad F: ut autem C ad BG, ita F ad EH; erit [a] ex æquali ut AB ad BG, ita DE ad EH. quod cum diviſæ magnitudines ſint proportionales, & compoſitæ proportionales [b] erunt. ut igitur AG ad GB, ita eſt DH ad HE. ſed & ut [c] GB ad C, ita HE ad F. ergo, ex [a] æquali, ut AG ad C, ita erit



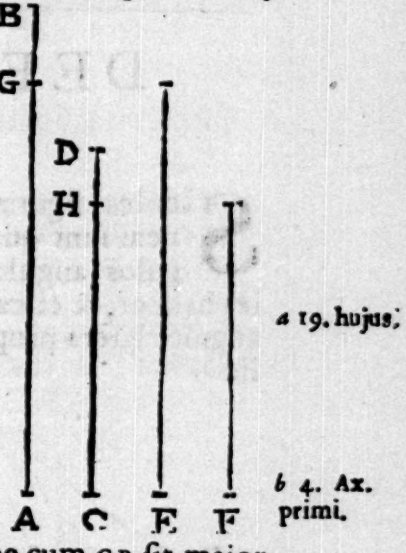
[a] 22. hujus. [b] 18. hujus. [c] hypoth.

erit DH ad F. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quàm tertia ad quartam: habeat autem & quinta ad ſecundam proportionem eandem quam ſexta ad quartam: & compoſita prima cum quinta ad ſecundam eandem proportionem habebit quam tertia cum ſexta ad quartam. Quod oſtendere oportebat.

PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima, duabus reliquis majores erunt.

Sint quátuor magnitudines proportionales AB, CD, E, F; & ſit ut AB ad CD, ita E ad F. ſit autem maxima ipſarum AB, & F minima. Dico AB & F ipſis CD & E majores eſſe. Ponatur enim ipſi quidem E æqualis AG, ipſi vero F æqualis CH. Quoniam igitur eſt ut AB ad CD, ita E ad F: eſtque AG æqualis E, & CH æqualis F; erit ut AB ad DC, ita AG ad CH. & quoniam eſt ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam erit CH; & reliqua GB ad reliquam HD [a] ut tota AB ad CD totam. major autem eſt AB quam CD. ergo & GB quam HD major erit. quod cum AG ſit æqualis ipſi E, & CH ipſi F; erunt AG & F ipſi CH & E æquales. [b] ſi autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo GB HD inæqualibus exiſtentibus, quippe cum GB ſit major, ſi ipſi quidem GB addantur AG & F, ipſi vero HD addantur CH & E: fient AB & F, ipſis CD & E neceſſario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima, duabus reliquis majores erunt. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 19. hujus.

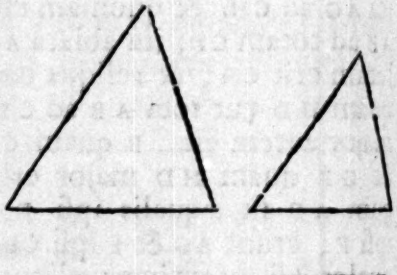
[b] 4. Ax. primi.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

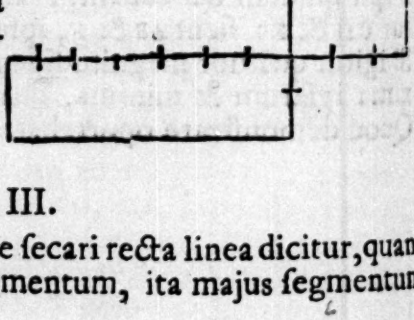
I.

SImiles figuræ rectilineæ ſunt quæ & ſingulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocæ figuræ ſunt quando in utraque figura antecedentes, & conſequentes rationum fuerint termini.



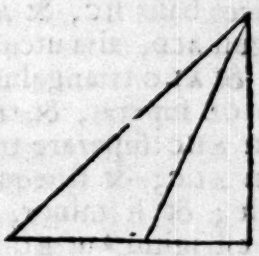
III.

Extrema ac media ratione ſecari recta linea dicitur, quando ſit ut tota ad majus ſegmentum, ita majus ſegmentum ad minus.

IV.

IV.

Altitudo cuiuſque figuræ eſt linea penpendicularis, quæ à vertice ad baſim ducitur.



V.

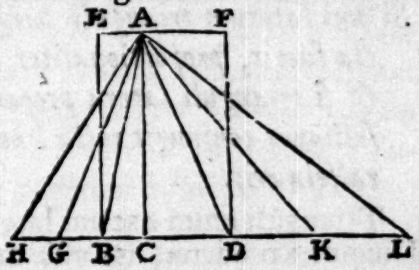
Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

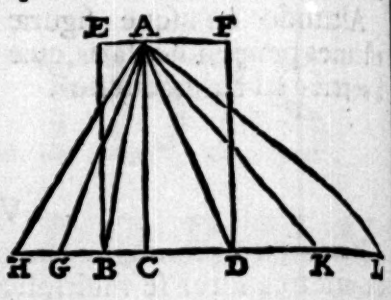
Triangula, & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint triangula quidem ABC ACD, parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. Dico ut baſis BC ad CD baſim, ita eſſe triangulum ABC ad triangulum ACD, & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Producatur BD ex utraque parte ad puncta HL, & ipſi quidem BC baſi æquales quotcunque ponantur BG GH, ipſi vero baſi CD ponantur quotcunque æquales DK KL, & AG AH AK AL jungantur. Quoniam igitur CB BG GH inter ſe æquales ſunt, erunt & triangula AHG AGB ABC inter [a] ſe æqualia. ergo quotuplex eſt baſis HC ipſius BC baſis, totuplex eſt AHC triangulum trianguli ABC. eadem ratione quotuplex eſt LC baſis ipſius baſis CD, totuplex eſt & triangulum ALC ipſius ACD trianguli: & ſi æqualis eſt HC baſis baſi CL, & triangulum AHC triangulo ALC eſt [a] æquale: & ſi baſis HC baſim CL ſuperat, & triangulum AHC ſuperabit triangulum ALC: & ſi minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus exiſtentibus, videlicet duabus baſibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD, ſumpta ſunt æque multiplicia baſis quidem BC, & ABC, trianguli vide-



[a] 38. primi.

videlicet baſis HC, & AHC triangulum: baſis vero CD & trianguli ACD, alia utcunque æque multiplicia, nempe CL baſis, & ALC triangulum; atque oſtenſum eſt ſi HC baſis baſim CL ſuperat, & triangulum AHC ſuperare triangulum ALC; & ſi æqualis, æquale; & ſi minor, minus. eſt igitur [b] ut BC baſis ad baſim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum. Et quoniam trianguli ABC duplum eſt [c] parallelogrammum EC, & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum [c], partes [d] autem cum pariter multiplicibus eandem inter ſe proportionem habent: igitur ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. quoniam igitur oſtenſum eſt ut baſis BC ad CD baſim, ita eſſe ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum; erit [e] ut BC baſis ad baſim CD, ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes. Quod demonſtrare oportebat.



[b] Def. 5. quinti.
[c] 41. primi.
[d] 15. quinti.
[e] 11. quinti.

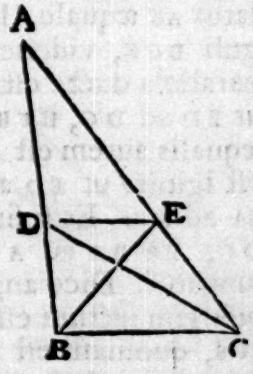
PROP. II. THEOR.

Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. & ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ſectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC, parallela ducatur DE. Dico ut BD ad DA, ita eſſe CE ad EA. Jungantur BE CD. Triangulum igitur BDE triangulo CDE eſt [a] æquale, in eadem enim ſunt baſi DE, & in eiſdem DE & BC parallelis; aliud autem triangulum eſt ADE: ſed æqualia ad idem eandem habent [b] proportionem; ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita eſt CDE triangulum ad triangulum ADE. ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita [c] eſt BD ad DA; nam cum eandem altitudinem habent, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter ſe ſunt ut baſes. & ob eandem cauſam ut CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & igitur ut BD ad DA, ita eſt [d] CE ad EA. Et ſi trianguli ABC latera AB AC pro-

[a] 37. primi.
[b] 7. quinti.
[c] 1. bujus.
[d] 11 quinti.

proportionaliter ſecta ſunt, *i. e.* ut BD ad DA, ita ſit CE ad EA; jungatur DE. Dico DE ipſi BC parallelam eſſe. Iiſdem conſtructis, quoniam eſt ut BD ad DA, ita CE ad EA; ut autem BD ad DA, ita [c] eſt BDE triangulum ad triangulum ADE; & ut CE ad EA, ita CDE triangulum [c] ad triangulum ADE, erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita [c] CDE triangulum ad triangulum ADE. quod cum utrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum [f] triangulo CDE æquale; & ſunt in eadem baſi DE. æqualia autem triangula, & in eadem baſi conſtituta, etiam in eiſdem [g] ſunt parallelis. ergo [g] DE ipſi BC parallela eſt. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. & ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ſectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. Quod oportebat demonſtrare.



[c] 11. quinti.

[f] 9. quinti.

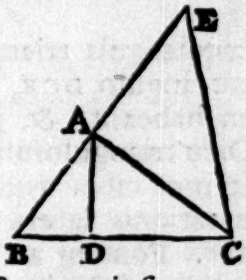
[g] 39. primi.

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea ſecet etiam baſim; baſis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & ſi baſis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad ſectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam ſecabit.

Sit triangulum ABC, & ſecetur angulus BAC bifariam recta linea AD. Dico ut BD ad CD, ita eſſe BA ad AC. Ducatur per C ipſi DA parallela [b] CE, & producta BA conveniat cum ipſa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædam AC, erit [c] A CE angulus angulo CAD æqualis. ſed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipſi ACE angulo æqualis erit. rurſus quoniam in parallelas AD EC recta linea

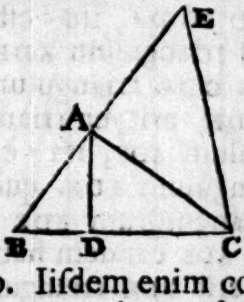
[a] 9. primi.



[b] 31. primi.

[c] 29. primi.

linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis eſt [e] interiori AEC. oſtenſus autem eſt & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipſi AEC æqualis erit: ac propterea [d] 6. primi. latus AE æquale [d] lateri AC. & quoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet ipſi EC [e] 2. hujus. parallela ducta eſt AD; erit [e] ut BD ad DC, ita BA ad AE; æqualis autem eſt AE ipſi AC. [f] 7. quinti. eſt igitur [f] ut BD ad DC, ita BA ad AC. Et ſi ſit ut BD ad DC, ita BA ad AC, & AD jungatur. Dico angulum BAC bifariam ſectum eſſe recta linea AD. Iiſdem enim conſtructis, quoniam eſt ut BD ad DC, ita AB ad AC; ſed & ut [g] 2. hujus. BD ad DC, ita [g] BA ad AE, etenim uni laterum trianguli [h] 11. quinti. BCE, videlicet ipſi EC parallela ducta eſt AD, erit [h] & ut [i] 9. quinti. BA ad AC, ita BA ad AE. ergo AC eſt [i] æqualis AE, ac [k] 5. primi. propterea & angulus AEC angulo ACE [k] æqualis. ſed angulus quidem AEC eſt æqualis angulo exteriori BAD; an- [l] 29. primi. gulus vero ACE æqualis [l] alterno CAD. quare & BAD angulus ipſi CAD æqualis erit. angulus igitur BAC bifariam ſectus eſt recta linea AD. Ergo ſi trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea etiam baſim ſecet; baſis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & ſi baſis partes eandem proportionem habent, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad ſectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam ſecabit. Quod oportebat demonſtrare.

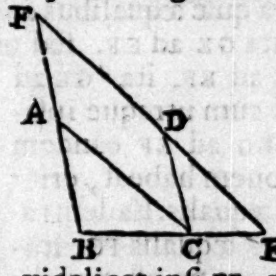


PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum latera quæ circum æquales angulos ſunt, proportionalia ſunt. & homologa, ſive ejuſdem rationis ſunt latera quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC DCE, quæ angulum quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC æqualem habeant, & præterea angulum BAC angulo CDE. Dico triangulorum ABC DCE proportionalia eſſe latera quæ ſunt circa æquales angulos; & homologa, ſive ejuſdem rationis latera eſſe quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. Ponatur BC in directum ipſi CE. Et quoniam [a] 17. primi. anguli ABC ACB duobus rectis minores [a] ſunt, æqualis autem eſt angulus ACB angulo DEC; erunt ABC DEC anguli

guli duobus rectis minores. quare BA ED productæ inter ſe conveniant [b]; producantur, & conveniant in puncto F. & quoniam angulus DCE eſt æqualis angulo ABC; erit [c] BF ipſi DG parallela. rurſus quoniam æqualis eſt angulus ACB angulo DEC, parallela erit AC ipſi FE. parallelogrammum igitur eſt FACD; ac propterea FA quidem ipſi CD, AC vero ipſi FD eſt [d] æqualis. & quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipſi FE, parallela ducta eſt AC; erit [e] ut BA ad AF, ita BC ad CE. æqualis autem eſt AF ipſi CD. ut igitur [f] BA ad CD ita BC ad CE. & permutando ut BA ad BC ita CD ad CB. rurſus quoniam CD parallela eſt BF, erit [e] ut BC ad CE, ita FD ad DE. ſed FD eſt æqualis AC. ergo ut [f] BC ad CE, ita AC ad DE. permutando igitur, ut BC ad CA ita CE ad ED. itaque quoniam oſtenſum eſt, ut AB ad BC ita DC ad CE, ut autem BC ad CA ita CE ad ED: erit [g] ex æquali; ut BA ad AC ita CD ad DE. Æquianglorum igitur triangulorum proportionalia ſunt latera quæ circum æquales angulos. & homologa, ſive ejuſdem rationis, latera ſunt quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. Quod demonſtrare oportebat.

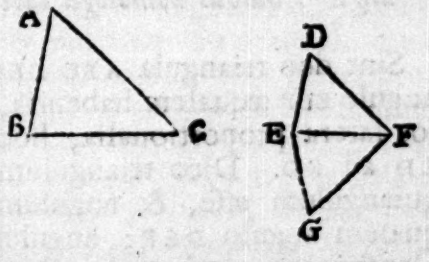


b 12. axio. primi.
c 28. primi.
d 34. primi.
e 2. hujus.
f 7. quinti.
g 22. quinti.

PROP. V. THEOR.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera ſubtenduntur.

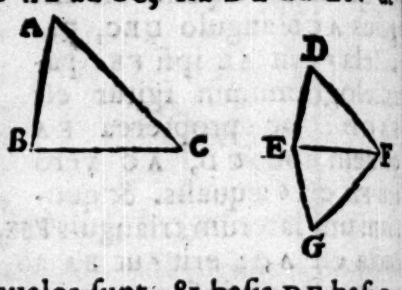
Sint duo triangula ABC DEF, quæ latera proportionalia habeant, hoc eſt, ſit ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF: ut autem BC ad CA, ita EF ad FD: & adhuc ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe, & æquales habere angulos quibus homologa latera ſubtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, & præterea angulum BAC angulo EDF. Conſtituatur enim [a] ad rectam lineam EF, & ad puncta in ipſa EF, angulo quidem ABC æqualis angulus FEG; angulo autem BCA angulus



a 23. primi.

gulus EFG. quare reliquus BAC angulus [b] reliquo EGF eſt æqualis. ideoque æquiangulum eſt triangulum ABC triangulo EGF. triangulorum igitur ABC EGF proportionalia ſunt latera quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. ergo ut AB ad BC [c], ita GE ad EF. ſed ut AB ad BC, ita DE ad EF. ut igitur DE ad EF, ita [d] GE ad EF. quod cum utraque ipſarum DE EG ad EF eandem proportionem habeat, erit [e] DE ipſi EG æqualis. Eadem ratione & DF æqualis FG. itaque quoniam DE eſt æqualis EG, communis autem EF; duæ DE EF duabus GE EF æquales ſunt, & baſis DF baſi FG æqualis. angulus igitur DEF eſt æqualis [f] angulo GEF, & DEF triangulum æquale triangulo GEF, & reliqui anguli reliquis angulis æqualis, quibus æqualia latera ſubtenduntur. ergo angulus quidem [illegible] eſt æqualis angulo [illegible], angulus vero EDF æqualis angulo EGF; & quoniam angulus DEF eſt æqualis angulo GEF, & angulus GEF angulo ABC, erit & angulus ABC angulo FED æqualis. eadem ratione & angulus ACB æqualis eſt angulo DFE, & adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos quibus homologa latera ſubtenduntur. Quod oportebat demonſtrare.

[b] 2. Cor. 32. primi.
[c] 4. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 9. quinti.
[f] 8. primi.



DFE = GFE

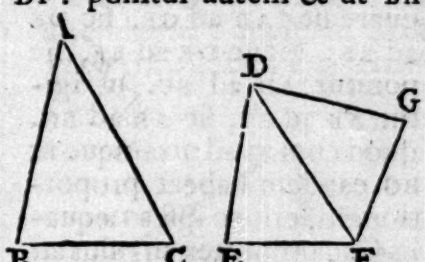
PROP. VI. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum BAC uni angulo EDF æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, hoc eſt, ſit ut BA ad AC, ita ED ad FD. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe, & angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF; angulum vero ACB angulo DFE. Conſtituatur [a] enim ad rectam lineam DF, & ad puncta in ipſa DF, alterutri angulorum BAC EDF æqualis angulus FDG, angulo autem ACB æqualis DFG. reliquus igitur

[a] 23. primi.

igitur ad B reliquo ad G eſt *b* æqualis. ergo triangulum ABC triangulo DGF æquiangulum eſt; ac propterea ut BA ad AC ita *c* eſt GD ad DF: ponitur autem & ut BA ad AC, ita ED ad DF. ut igitur *d* ED ad DF, ita GD ad DF. quare ED æqualis eſt *e* ipſi DG, & communis DF. ergo duæ ED DF duabus GD DF æquales ſunt & angulus EDF angulo GDF eſt æqualis; baſis igitur EF eſt *f* æqualis baſi FG, triangulumque DEF æquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. ergo angulus quidem DFG eſt æqualis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. ſed angulus DFG æqualis eſt angulo ACB: & angulus igitur ACB angulo DFE eſt æqualis. ponitur autem & BAC angulus æqualis angulo EDF, ergo & reliquus qui ad B æqualis *b* eſt reliquo ad E. æquiangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo DEF. Quare ſi duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera ſubtenduntur. Quod oſtendere oportebat.



b 2. Cor. 32. primi.
c 4. hujus.
d 11. quinti.
e 9. quinti.
f 4. primi.

PROP. VII. THEOR.

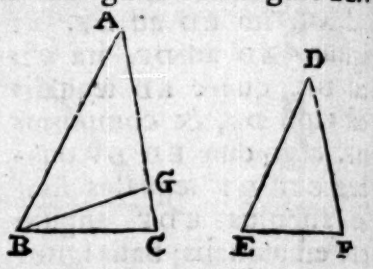
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque ſimul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos circa quos latera ſunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC DEF latera proportionalia, ut ſit DE ad EF, ſicut AB ad BC: & reliquorum qui ad C F utrumque ſimul minorem vel non minorem recto. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe; angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis eſt angulus ABC angulo DEF, unus ipſorum major erit; ſit major ABC: & conſtituatur *a* ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipſa B, angulo DEF æqualis angulus ABG. &

a 23. primi.

quoniam angulus quidem A eſt æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis *b*. æquiangulum igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF. quare ut *c* AB ad GB, ſic DE ad EF: utque DE ad EF, ſic ponitur AB ad BC. ut igitur AB ad BC, ſic AB ad BG. quod cum AB ad utramque BC BG eandem habeat proportionem, erit BC ipſi BG æqualis *d*: ac propterea angulus ad C eſt æqualis *e* angulo BGC. quare uterque angulorum BCG BGC minor eſt recto, igitur qui ei deinceps eſt AGB major eſt recto. atque oſtenſus eſt angulus AGB æqualis angulo qui ad F. angulus igitur qui ad F recto major eſt. atqui ponitur non major: cum C non eſt major recto, quod eſt abſurdum. non igitur inæqualis eſt angulus ABC angulo DEF. ergo ipſi eſt æqualis. eſt autem & angulus ad A æqualis ei qui ad D. quare & reliquus qui ad C æqualis *b* reliquo qui ad F. æquiangulum igitur eſt ABC triangulum triangulo DEF. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque ſimul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos circa quos proportionalia ſunt latera. Quod oportebat demonſtrare.

b 2.Cor.32. primi.
c 4. hujus.
d 9 quinti.
e 5. primi.

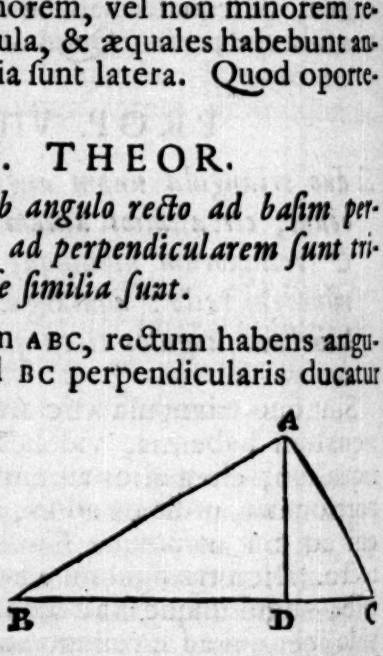


PROP. VIII. THEOR.

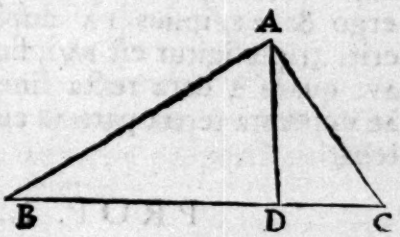
Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur: quæ ad perpendicularem ſunt triangula, & toti, & inter ſe ſimilia ſunt.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC: & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD ADC toti triangulo ABC, & inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus BAC eſt æqualis angulo ADB, rectus enim uterque eſt, & angulus ad B communis duobus triangulis ABC ABD; erit *a* reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo ABD. quare *b* ut BC quæ ſubtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA ſubtendentem

a 2 Cor.32. primi.
b 4. hujus.



tem angulum rectum trianguli ABD, ſic ipſa AB ſubtendens angulum ad C trianguli ABC, ad DB ſubtendentem angulum æqualem angulo ad C, videlicet BAD ipſius ABD trianguli; & adhuc AC ad AD ſubtendentem angulum ad B communem duobus triangulis. ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum eſt [c]; & circa æquales angulos latera habet proportionalia. ſimile igitur [c] eſt triangulum ABC triangulo ABD. eadem ratione demonſtrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC ſimile eſſe. quare utrumqne ipſorum ABD ADC toti ABC triangulo eſt ſimile. Dico inſuper triangula ABD ADC etiam inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus BDA rectus eſt æqualis recto ADC; ſed & BAD oſtenſus eſt æqualis angulo ad C; erit reliquus ad B reliquo DAC æqualis [a]. æquiangulum igitur eſt triangulum ABD triangulo ADC. ergo [b] ut BD trianguli ABD ſubtendens BAD angulum, ad DA trianguli ADC ſubtendentem angulum qui eſt ad C, æqualem angulo BAD, ſic ipſa AD trianguli ABD ſubtendens angulum ad B, ad DC ſubtendentem angulum DAC ei qui eſt ad B æqualem; & adhuc BA ad AC ſubtendentem angulum rectum ADC. ſimile igitur eſt ABD triangulum triangulo ADC. Quare ſi in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem ſunt triangula, & toti, & inter ſe ſimilia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.



[c] 1. Def. hujus.

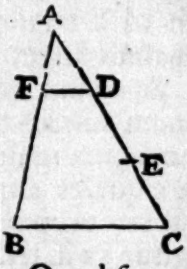
Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad baſim perpendicularem ductam, mediam proportionalem eſſe inter ſegmenta baſis: & præterea inter baſim & baſis ſegmentum utrumlibet, latus ſegmento conterminum medium eſſe proportionale.

PROP. IX. PROBL.

A data recta linea imperatam partem abſcindere.

Sit data recta linea AB. Oportet ab ipſa AB imperatam partem abſcindere. Imperetur pars tertia; & ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipſa AB angulum quemlibet contineat; ſumaturque in AC quodvis punctum D, & ipſi AD æquales [a] ponantur DE EC, deinde [a] 3. primi.

b 31.primi. jungatur BC; per D ipsi BC parallela b ducatur DF. Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC, c 2. hujus. parallela ducta est FD; erit c ut CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem est CD ipsius DA. ergo & BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. Quod facere oportebat.



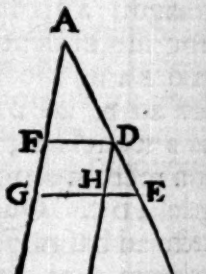
PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam insectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.

Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. Sit secta AC in punctis D & E, & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant, junctaque BC per puncta quidem D & E ipsi BC parallelæ a ducantur DF EG: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH HB: ac propterea DH quidem est b æqualis FG, HK, vero ipsi GB. & quoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC, parallela c 2. hujus. ducta est HE; erit c ut CE ad ED, ita KH ad HD. æqualis autem est KH quidem ipsi BG, HD vero ipsi GF. est igitur ut CE ad ED, ita BG ad GF. rursus quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG, parallela ducta est FD, ut ED ad DA, ita c erit GF ad FA. sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF. ut igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, & ut ED ad DA, ita GF ad FA. ergo data recta linea insecta AB, datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. Quod facere oportebat.

a 31.primi.

b 34.primi.

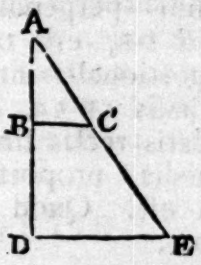


PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC, & ponantur ita ut angulum quemvis contineant. Oportet ipsis AB AC tertiam

tertiam proportionalem invenire. Producantur AB AC ad puncta D E: ponaturque ipſi AC æqualis BD; & juncta BC, ducatur [a] per D ipſi BC parallela DE. quoniam igitur uni laterum trianguli ADE, videlicet ipſi DE parallela ducta eſt BC, erit [b] ut AB ad BD, ita AC ad CE. æqualis autem eſt BD ipſi AC, ut igitur AB ad AC, ita eſt AC ad CE. quare datis rectis lineis AB AC tertia proportionalis inventa eſt CE. Quod facere oportebat.



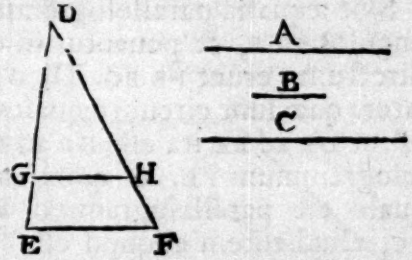
[a] 31. primi.

[b] 2. hujus.

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A B C. Oportet ipſis A B C quartam proportionalem invenire. Exponantur duæ rectæ lineæ D E D F angulum quemvis EDF continentes: & ponatur ipſi quidem A æqualis DG, ipſi vero B æqualis GE, & ipſi C æqualis DH: junctaque GH, per E ipſi parallela [a] ducatur EF. itaque quoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipſi EF, parallela ducta eſt GH, erit ut DG ad GE ita [b] DH ad HF. eſt autem DG ipſi A æqualis; GE vero æqualis B, & DH æqualis C, ut igitur A ad B, ita C ad HF. quare datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inventa eſt HF. Quod facere oportebat.



[a] 31. primi.

[b] 2. hujus.

PROP. XIII. PROBL.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

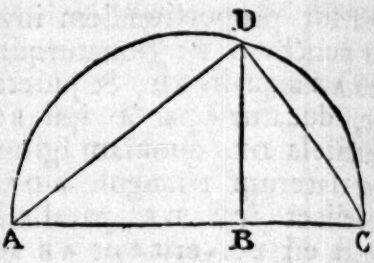
Sint datæ duæ rectæ lineæ AB BC. Oportet inter ipſas AB BC mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, & ſuper ipſa AC deſcribatur ſemicirculus ADC, ducaturque [a] à puncto B ipſi AC ad rectos angulos BD, & AD DC jungantur. Quoniam igitur angulus ADC eſt in ſemicirculo, is rectus [b] eſt. & quoniam in triangulo rectan-

[a] 11. primi.

[b] 31. tertii.

gulo ADC, ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducta eſt DB, erit DB media proportionalis [c] inter ſegmenta baſis AB BC. duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inventa eſt. QUOD facere oportebat.

[c] Cor. 8. hujus.



PROP. XIV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum latera quæ ſunt circum æquales angulos, reciproca ſunt: Et quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum, latera quæ circum æquales angulos, ſunt reciproca; ea inter ſe ſunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma AB BC, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directum DB BE. ergo & in directum [a] erunt FB BG. Dico parallelogrammorum AB BC latera quæ ſunt circum æquales angulos reciproca eſſe: hoc eſt ut DB ad BE ita eſſe GB ad BF. Compleatur enim parallelogrammum FE. & quoniam parallelogrammum AB æquale eſt parallelogrammo BC, aliud autem aliquod eſt FE parallelogrammum, erit ut AB ad FE [b], ita BC ad FE. ſed ut AB quidem ad FE, ita [c] eſt DB ad BE; ut autem BC ad FE, it [c] GB ad BF; ut igitur [d] DB ad BE, ita GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. Et ſi reciproca ſunt ſeu ex contraria parte ſibi ipſis reſpondeant latera quæ ſunt circum æquales angulos, ſit nempe ut DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale eſſe. Quoniam enim eſt ut DB ad BE, ita GB ad BF; ut autem DB ad BE, ita [e] AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE, & ut GB ad BF, ita [e] BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit [f] & ut AB ad FE, ita BC ad FE. æquale igitur eſt AB [e] parallelogrammum parallelogrammo BC. Ergo æqualium & unum

[a] 14 primi.

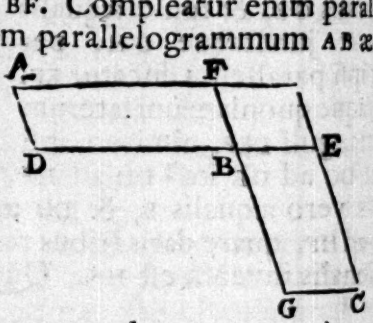
[b] 7. quinti.

[c] 1. hujus.

[d] 11. hujus. quinti.

[e] 9. quinti.

[f]



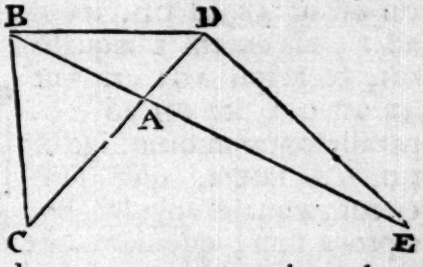
uni

uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt, ſeu ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: & quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt, ea inter ſe ſunt æqualia. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ſunt reciproca: Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca ſunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

Sint æqualia triangula ABC ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum ſcilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC ADE latera quæ circum æquales angulos reciproca eſſe, hoc eſt ut CA ad AD, ita eſſe EA ad AB. ponantur enim ita ut in directum ſit CA ipſi AD. ergo & EA ipſi AB in directum [a] erit; & [d] 14 primi.



jungatur BD. Quoniam igitur triangulum ABC æquale eſt triangulo ADE, aliud autem eſt ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita [b] triangulum ADE ad triangulum BAD. ſed ut triangulum quidem CAB ad [b] 7. quinti.

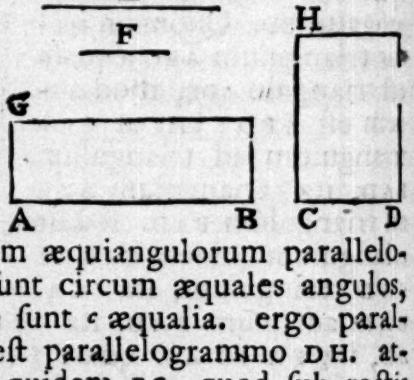
BAD triangulum, ita [c] CA ad AD; ut autem triangulum [c] 1. hujus.
EAD ad ipſum BAD, ita [c] EA ad AB. ut [d] igitur CA ad [d] 11. quinti
AD, ita EA ad AB. quare triangulorum ABC ADE latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt. Et ſi reciproca ſunt latera triangulorum ABC ADE, ſcil. ſit ut CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC triangulo ADE æquale eſſe. juncta enim rurſus BD, quoniam ut CA ad AD, ita eſt EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita [c] ABC triangulum ad triangulum BAD; & ut EA ad AB, ita [c] triangulum EAD ad BAD triangulum, erit [d] ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. utrumque igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea [e] æquale eſt ABC trian- [e] 9. quinti.

gulum triangulo ADE. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt: & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca ſunt, ea inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum æquale eſt ei rectangulo quod ſub mediis continetur: Et ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod ſub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD E F, ſitque ut AB ad CD, ita E ad F. Dico rectangulum contentum ſub rectis lineis AB F æquale eſſe ei quod ſub ipſis CD E
[a] 11. primi. continetur. Ducantur enim [a] à punctis A C ipſis AB CD ad rectos angulos AG CH; ponaturque ipſi quidem F æqualis AG, ipſi vero E æqualis CH, & compleantur BG DH parallelogramma. Quoniam igitur eſt ut AB ad CD, ita E ad F; eſt autem E æqualis
[b] 7. quinti. CH, & F ipſi AG: erit [b] ut AB ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG DH latera, quæ ſunt circum æquales angulos, reciproca ſunt; quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ ſunt circum æquales angulos,
[c] 14. hujus. reciproca ſunt, ea inter ſe ſunt [c] æqualia. ergo parallelogrammum BG æquale eſt parallelogrammo DH. atque eſt parallelogrammum quidem BG, quod ſub rectis lineis AB F continetur, etenim AG eſt æqualis F; parallelogrammum vero DH, quod continetur ſub ipſis CD E, cum CH ipſi E ſit æqualis. rectangulum igitur contentum ſub AB & F eſt æquale ei quod ſub ipſis CD & E continetur. Et ſi rectangulum contentum ſub AB F ſit æquale ei quod ſub CD & E continetur. Dico quatuor rectas lineas proportionales eſſe, videlicet ut AB ad CD, ita E ad F. iiſdem enim conſtructis quoniam rectangulum contentum ſub AB & F eſt æquale ei quod ſub CD & E continetur, atque eſt contentum quidem ſub A B F rectangulum BG, etenim AG



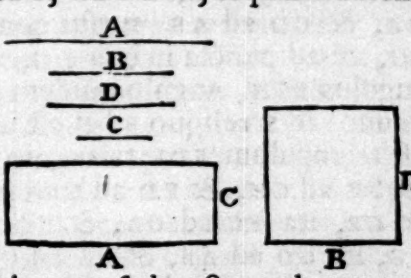
eſt

eſt æqualis F; contentum vero ſub CD E eſt rectangulum DH, quòd CH ipſi E ſit æqualis. erit parallelogrammum BG æquale parallelogrammo DH; & ſunt æquiangula. æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt. [c] quare ut AB ad CD, ita CH ad AG, æqualis autem eſt CH ipſi E, & AG ipſi F. ut igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum æquale eſt ei eſt quod ſub mediis continetur: & ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod ſub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum æquale eſt ei quod à media fit quadrato: Et ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C; & ſit ut A ad B, ita B ad C. Dico rectangulum contentum ſub AC æquale eſſe ei quod à media B fit quadrato. Ponatur ipſi B æqualis D. Et quoniam ut A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipſi D; erit ut A ad B [a], ita D ad C. ſi autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum ſub extremis contentum eſt [b] æquale ei quod ſub mediis continetur. ergo rectangulum ſub AC contentum eſt



[a] 7. quinti.

[b] 16. hujus.

æquale ei quod continetur ſub B D. ſed rectangulum contentum ſub B D eſt æquale quadrato quod fit ex ipſa B; etenim B eſt æqualis D. rectangulum igitur contentum ſub AC eſt æquale ei quod ex B fit quadrato. Et ſi rectangulum contentum ſub A C æquale ſit quadrato quod fit ex B. Dico ut A ad B, ita eſſe B ad C. Iiſdem enim conſtructis, quoniam rectangulum contentum ſub A C æquale eſt quadrato quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B eſt rectangulum quod ſub ipſis B D continetur, eſt enim B æqualis ipſi D; erit rectangulum contentum ſub A C æquale ei quod ſub B D continetur. ſi autem rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod ſub mediis continetur, quatuor rectæ

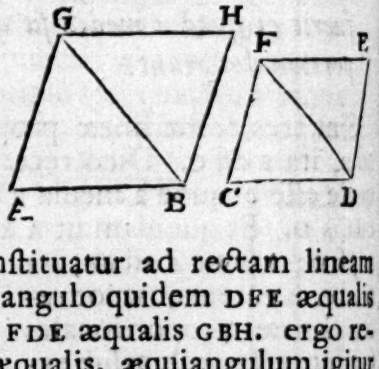
lineæ

lineæ proportionales [b] erunt. eſt igitur ut A ad B, ita D ad C; æqualis autem B ipſi D. ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum eſt æquale ei quod à media fit quadrato. Et ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XVIII. PROBL.

A data recta linea dato rectilineo ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.

Sit data recta linea AB, datum autem rectilineum CE. Oportet à recta linea AB rectilineo CE ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere. Jungatur DF, & ad rectam lineam AB, & ad puncta in ipſa A B, angulo quidem C æqualis angulus [a] conſtituatur GAB, angulo autem CDF angulus ABG. reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB eſt [b] æqualis. ergo æquiangulum eſt FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea [c] ut FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. rurſus conſtituatur ad rectam lineam BG, & ad puncta in ipſa B G, angulo quidem DFE æqualis angulus BGH, angulo quidem FDE æqualis GBH. ergo reliquus [b] ad E reliquo ad H eſt æqualis. æquiangulum igitur eſt triangulum FDE triangulo GBH. quare ut [c] FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB. oſtenſum autem eſt & ut FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB: & ut igitur [b] FC ad AG, ita CD ad AB, & FE ad GH, & adhuc ED ad HB. itaque quoniam angulus quidem CFD eſt æqualis angulo AGB; angulus autem DFE angulo BGH. erit totus CFE angulus toti AGH æqualis. eadem ratione & CDE eſt æqualis ipſi ABH, & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H. æquiangulum igitur eſt AH ipſi CE, & latera circum æquales ipſis angulos habet proportionalia. ergo rectilineum AH rectilineo CE ſimile [e] erit: A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum AH deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.



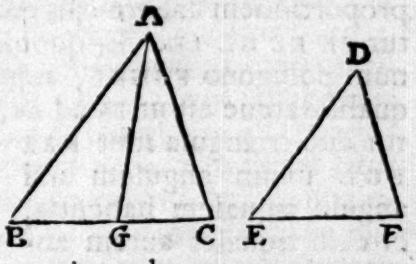
[a] 23. primi.
[b] 2. Cor. 32. primi.
[c] 4. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 1. Def. hujus.

PROP.

PROP. XIX. THEOR.

Similia triangula inter ſe ſunt in duplicata proportione laterum homologorum.

Sint ſimilia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualem angulo ad E, & ſit ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum ſit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam proportionem habere ejus quam habet BC ad EF. Sumatur enim ipſis [a] BC EF tertia proportionalis BG, ut ſit BC ad EF ita EF ad BG. & jungatur GA. Quoniam igitur ut AB ad BC, ita eſt DE ad EF; erit permutando ut AB ad DE, ita BC ad EF. ſed ut BC ad EF, ita EF ad BG. ut [b] igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera, quæ ſunt circum æquales angulos, reciproca ſunt. quorum autem triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt, ea inter ſe æqualia [c] ſunt. æquale igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF. & quoniam eſt ut BC ad EF, ita EF ad BG; ſi autem tres rectæ lineæ proportionales ſint, prima ad tertiam duplicatam proportionem [d] habet ejus quam habet ad ſecundam: habebit igitur BC ad BG duplicatam proportionem ejus quam habet BC ad EF. ut autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG [e]. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam proportionem habet ejus quam BC habet ad EF. eſt autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. & triangulum igitur ABC [f] ad triangulum DEF duplicatam proportionem habebit ejus quam habet BC ad EF. Quare ſimilia triangula inter ſe ſunt in duplicata proportione laterum homologorum. Quod oſtendere oportebat.



[a] 11. hujus.

[b] 11. quinti.

[c] 15. hujus.

[d] 10. Def. quinti.

[e] 1. hujus.

[f] 7. quinti.

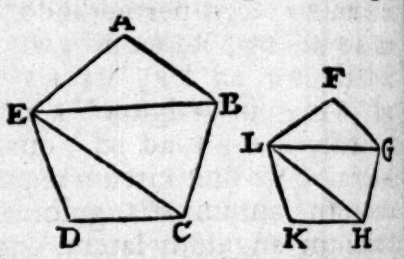
Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita eſſe triangulum, quod fit à prima ad triangulum quod à ſecunda ſimile, & ſimiliter deſcriptum; quoniam oſtenſum eſt ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc eſt ad triangulum DEF. Quod oſtendere oportebat.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint ſimilia polygona ABCDE FGHKL, & ſit AB homologum ipſi FG. Dico polygona ABCDE FGHKL in ſimilia triangula dividi, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam habet AB ad FG. Jungantur BE EC GL LH. Et quoniam ſimile eſt ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL eſt [a] æqualis, atque eſt ut BA ad AE, ita GF ad FL. quoniam igitur duo triangula ſunt ABE FGL unum angulum uni angulo æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia. erit [b] triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum; ergo [c] & ſimile. angulus igitur ABE æqualis eſt angulo FGL. eſt autem & totus ABC angulus æqualis [a] toti FGH, propter ſimilitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH eſt æqualis. & quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ABE FGL, eſt [a] ut EB ad BA, ita LG ad GF. ſed & propter ſimilitudinem polygonorum [a], ut AB ad BC, ita eſt FG ad GH; erit ex æquali ut [d] EB ad BC, ita LG ad GH. hoc eſt circum æquales angulos EBC LGH latera ſunt proportionalia; æquiangulum igitur [b] eſt EBC triangulum triangulo LGH. quare & [c] ſimile. eadem ratione & ECD triangulum ſimile eſt triangulo LHK. ſimilia igitur polygona ABCDE FGHKL in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia. Dico & homologa totis: hoc eſt ut proportionalia ſint triangula, & antecedentia quidem ſunt ABE EBC ECD, conſequentia autem ipſorum FGL LGH LHK; & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt AB ad FG. quoniam enim ſimile eſt ABE triangulum triangulo FGL, habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem [e] ejus quam habet BE ad GL. eadem ratione, & triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam [d] proportionem habet ejus quam BE ad GL. eſt [f] igitur ut ABE trian-



[a] 1. Def. hujus.
[b] 6. hujus.
[c] 4. hujus.
[d] 22. quinti.
[e] 19. hujus.
[f] 11 quinti.

triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum. rurſus quoniam ſimile eſt triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam proportionem *e* ejus quam recta linea CE habet ad rectam HL. eadem ratione & ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam proportionem habet ejus quam CE ad HL. eſt *f* igitur ut triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. oſtenſum autem eſt & ut EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GHL triangulum, & triangulum ECD ad ipſum LHK. & igitur ut unum antecedentium ad unum conſequentium *g*, ſic omnia antecedentia ad omnia conſequentia. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL: ſed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG, ſimilia enim triangula in duplicata *h* ſunt proportione laterum homologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus. Quod demonſtrare oportebat.

f 12. quinti.

g 12. quinti.

h 19. hujus.

Eodem modo & in ſimilibus quadrilateris oſtendetur ea eſſe in duplicata proportione laterum homologorum. oſtenſum autem eſt in triangulis.

COROLL.

1. Ergo univerſæ ſimiles figuræ rectilineæ inter ſe ſunt in duplicata proportione homologorum laterum. & ſi ipſis AB FG tertiam proportionalem ſumamus, quæ ſit X; habebit AB ad X duplicatam proportionem ejus quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam proportionem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt AB ad FG. atque oſtenſum eſt hoc in triangulis.

2. Uni-

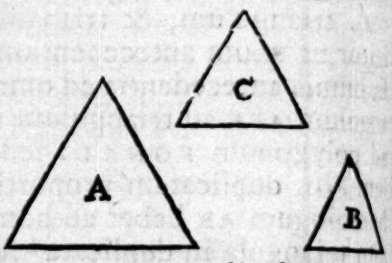
2. Universe igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram quæ fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A B simile rectilineo C. Dico & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum [a] erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, & circum æquales angulos latera proportionalia habebit [a]. utrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est & circum æquales angulos latera habet proportionalia. quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea [a] A ipsi B est simile. Quod demonstrare oportebat.

[a] 1. Def. hujus.



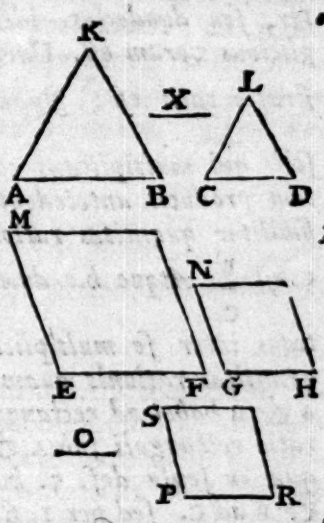
PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea quæ ab ipsis fiant, similia, & similiter descripta, proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, & ut AB ad CD, ita sit EF ad GH. Describanturque [a] ab ipsis quidem AB CD similia, & similiter posita rectilinea KAB LCD: ab ipsis vero EF GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF NH. Dico ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineum MF ad ipsam NH rectilineum. Sumatur ipsis [b] quidem AB CD tertia proportionalis X; ipsis vero EF GH tertia proportionalis O. Et quoniam est ut AB ad CD, ita EF ad GH: ut autem CD ad X, ita GH ad O; erit ex æquali [c] ut AB ad X, ita EF ad O. sed ut AB quidem ad X, ita est [d] rectilineum KAB ad LCD rectilineum

[a] 18. hujus.
[b] 11. hujus.
[c] 22. quinti.
[d] 2. Cor. 20. hujus.

lineum, ut autem EF ad O, ita [d] rectilineum MF ad rectilineum NH. ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita eſt [e] rectilineum MF ad NH rectilineum. Et ſi ſit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. Dico ut AB ad CD, ita eſſe EF ad GH. fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad [f] PR, & deſcribatur [g] ab ipſa PR alterutri rectilineorum MF NH ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum SR. quoniam igitur eſt ut AB ad CD, ita EF ad PR, & deſcripta ſunt ab ipſis quidem AB CD ſimilia, & ſimiliter poſita KAB LCD rectilinea, ab ipſis vero EF PR ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea MF SR, erit [g] ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad SR rectilineum: ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. ergo ut rectilineum MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. quod cum rectilineum MF ad utrumque ipſorum NH SR eandem habeat proportionem, erit [h] rectilineum NH ipſi SR æquale. eſt autem ipſi ſimile, & ſimiliter poſitum. ergo GH eſt æqualis PR. & quoniam ut AB ad CD, ita eſt EF ad PR: æqualis autem PR ipſi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipſis fiunt, ſimilia, & ſimiliter deſcripta proportionalia erunt: & ſi rectilinea quæ ab ipſis fiunt, ſimilia, & ſimiliter deſcripta proportionalia fuerint, & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonſtrare.



[d] 11. quinti.

[e] 11. quinti.

[f] 12. hujus.

[g] ex prius demonſtratis.

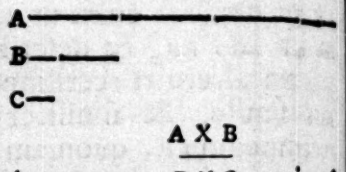
[h] 9. quinti.

LEMMA.

Poſitis tribus rectis quibuſcunque A, B *&* C; *ratio primæ* A *ad tertiam* C, *æqualis eſt rationi compoſitæ ex ratione primæ* A *ad ſecundam* B, *& ratione ſecundæ* B *ad tertiam* C.

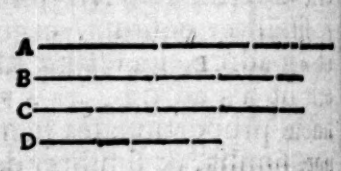
Sit V. G. *numerus ternarius exponens ſeu denominator rationis* A *ad* B, *hoc eſt ſit* A *tripla ipſius* B, *& ſit numerus quaternarius exponens rationis* B *ad* C, *erit numerus duodenarius ex numeri ternarii & quaternarii multiplicatione compo-*

compositus exponens rationis A *ad* C; *nam quia* A *continet* B *ter, &* B *continet* C *quater, continebit* A *ipsum* C *ter quater, seu duodecies. idem de aliis multiplicibus vel submultiplicibus verum est. Universalis vero hujus Theorematis demonstratio talis est; Quantitas rationis* A *ad* B *est numerus* $\frac{A}{B}$, *scil. qui multiplicans consequentem producit antecedentem. Et similiter quantitas rationis* B *ad* C *est* $\frac{B}{C}$ *Atque hæ duæ quantitates inter se multiplicatæ efficiunt numerum* $\frac{A \times B}{B \times C}$ *qui est quantitas rationis quam rectangulum comprehensum sub rectis* A *&* B *habet ad rectangulum sub* B *&* C *rectis. Adeoque dicta ratio rectanguli sub* A *&* B, *ad rectangulum sub* B *&* C *ea est quæ in sensu def. 5. hujus, componitur ex rationibus* A *ad* B *&* B *ad* C. *sed per* I. 6. *rectangulum sub* A *&* B, *est ad rectangulum sub* B *&* C, *ut* A *ad* C. *& igitur ratio* A *ad* C *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, *&* B *ad* C.



Positis vero quatuor rectis quibuscunque A, B, C, *&* D; *Ratio primæ* A *ad quartam* D *æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ* A *ad secundam* B, *& ratione secundæ* B *ad tertiam* C, *& ratione tertiæ* C *ad quartam* D.

Nam in tribus rectis A, C, *&* D, *ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* C, *&* C *ad* D. *Et hactenus est ostensum rationem* A *ad* C *æqualem esse rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B *&* B *ad* C. *Et igitur ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C *&* C *ad* D. *Similiter ostendetur, in quotcunque rectis, rationem primæ ad ultimam æqualem esse rationi compositæ ex rationibus primæ ad secundam, secundæ ad tritiam, tertiæ ad quartam, & ita deinceps usque ad ultimam.*



Si exponantur aliæ magnitudines quælibet, præter rectas, idem obtinebit. Quod constabit si concipiantur tot rectæ A, B, C *&c. ordine positæ quot sunt magnitudines, & in eadem ratione: ita* VIZ. *ut recta* A *sit ad rectam* B *ut prima magnitudo ad secundam, & recta* B *ad rectam* C *ut secunda magnitudo ad tertiam, & ita porro. Manifestum est per* 22. 5. *esse ex æquo rectam* A *ad ultimam rectam sicut prima magnitudo ad ultimam. Sed ratio rectæ* A *ad ultimam rectam æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C, *&*

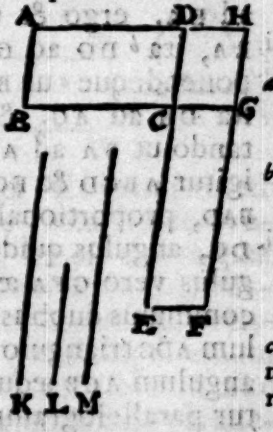
ita

ita porro uſque ad ultimam rectam. Et, ex hypotheſi, ratio cujuſlibet rectæ ad ſibi proximam, eadem eſt cum ratione magnitudinis ejuſdem ordinis ad ſibi proximam. Et igitur ratio primæ magnitudinis ad ultimam, æqualis eſt rationi compoſitæ ex rationibus primæ magnitudinis ad ſecundam, ſecundæ ad tertiam, & ita deinceps uſque ad ultimam. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam.

Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG. Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compoſitam ex lateribus, videlicet compoſitam ex proportione quam habet BC ad CG, & ex proportione quam DC habet ad CE. Ponatur enim ut BC ſit in directum ipſi CG. ergo & DC ipſi CE in directum [a] erit: & compleatur DG parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K, & fiat ut BC ad CG, ita [b] K ad L, ut autem DC ad CE, ita L ad M. proportiones igitur ipſius K ad L, & L ad M eædem ſunt quæ proportiones laterum videlicet BC ad CG, & DC ad CE. ſed proportio K ad M compoſita eſt [c] ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compoſitam. & quoniam eſt ut BC ad CG [d], ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; ſed ut BC ad CG, ita K ad L: erit [e] ut K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum. rurſus quoniam eſt ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF: ut autem DC ad CE, ita L ad M. ergo ut L ad M, ita erit [e] parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. itaque cum oſtenſum ſit ut K quidem ad L ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH: ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum; erit [f] ex æquali ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipſum CF. habet autem K ad M proportionem ex lateribus compoſitam. ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compoſitam ex lateribus. Æquiangula igitur parallelogramma



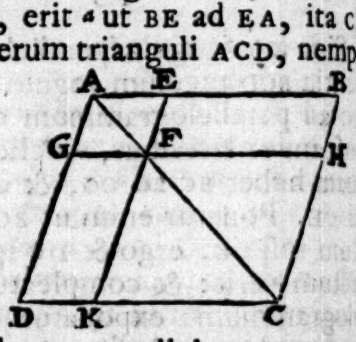
[a] 14. primi.
[b] 12. hujus.
[c] per Lemma ſuperius.
[d] 1. hujus.
[e] 11. quinti.
[f] 22. quinti.

lelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XXIV. THEOR.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum ſunt parallelogramma, & toti, & inter ſe ſimilia ſunt.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC: circa diametrum vero AC parallelogramma ſint EG HK. Dico parallelogramma EG HK & toti ABCD, & inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim uni laterum trianguli ABC, videlicet ipſi BC parallela ducta eſt EF, erit [a] ut BE ad EA, ita CF ad FA. quoniam rurſus uni laterum trianguli ACD, nempe ipſi CD ducta eſt parallela FG, ut CF ad FA, ita [a] erit DG ad GA. ſed ut CF ad FA ita oſtenſa eſt & BE ad EA. ergo & ut BE ad EA, ita [b] DG ad GA, componendoque [c] ut BA ad AE, ita DA ad AG. & permutando ut BA ad AD, ita EA ad AG. parallelogrammorum igitur ABCD & EG latera, quæ circa communem angulum BAD, proportionalia ſunt. & quoniam parallela eſt GF ipſi DC, angulus quidem AGF eſt [d] æqualis angulo ADC, angulus vero GFA æqualis angulo DCA, & angulus DAC eſt communis duobus triangulis ADC AGF; erit igitur triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. eadem ratione & triangulum ACB æquiangulum eſt triangulo AFE. totum igitur parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG eſt æquiangulum. ergo ut AD ad DC, ita [e] AG ad GF, ut autem DC ad CA, ita GF ad FA, & ut AC ad CB, ita AF ad FE, & præterea ut CB ad BA, ita FE ad EA. itaque quoniam oſtenſum eſt ut DC ad CA, ita eſſe GF ad FA, ut autem AC ad CB, ita AF ad FE; erit [f] ex æquali ut DC ad CB, ita GF ad FE. ergo parallelogrammorum ABCD & EG proportionalia ſunt latera quæ circum æquales angulos, ac propterea [g] parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG eſt ſimile. eadem ratione, & parallelogrammum ABCD ſimile eſt parallelogrammo KH. utrumque igitur ipſorum EG HK parallelogrammorum, parallelogrammo ABCD eſt ſimile. quæ autem eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia [h] ſunt. parallelogrammum igitur EG ſimile eſt parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum



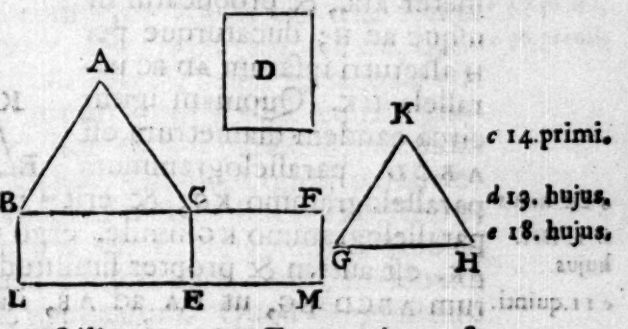
[a] 2. hujus.
[b] 11 quinti.
[c] 18. quinti.
[d] 29. primi.
[e] 4. hujus.
[f] 22. quinti.
[g] 1. Def. hujus.
[h] 21. hujus.

metrum ſunt parallelogramma, & toti, & inter ſe ſunt ſimilia. Quod oſtendere oportebat.

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo, ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet ſimile conſtituere ABC, cui autem æquale ſit D. Oportet ipſi ABC ſimile, & ipſi D æquale idem conſtituere. Applicetur [a] ad rectam quidem lineam BC rectilineo ABC æquale parallelogrammum BE. ad rectam vero CE applicetur [b] parallelogrammum CM æquale ipſi D, in angulo FCE, qui CBL angulo eſt æqualis. in directum igitur [c] eſt BC ipſi CF, & LE ipſi EM. ſumantur [d] inter BC CF media proportionalis GH, & [e] ab ipſa GH deſcribatur rectilineum KGH ſimile & ſimiliter poſitum rectilineo ABC. Et quoniam eſt ut BC ad GH, ita GH ad CF, ſi autem tres rectæ lineæ proportionales ſint, ut prima ad tertiam [f], ita eſt figura quæ fit à prima, ad eam quæ à ſecunda, ſimilem & ſimiliter deſcriptam: erit ut BC ad CF. ita ABC rectilineum ad rectilineum KGH. ſed & ut BC ad CF, ita [g] parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum, ut [h] igitur rectilineum ABC ad rectilineum KGH, ita BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF. quare [i] permutando ut ABC rectilineum ad parallelogrammum BE, ita rectilineum KGH ad FE parallelogrammum. eſt autem rectilineum ABC æquale parallelogrammo BE. æquale igitur eſt & KGH rectilineum parallelogrammo BF. ſed EF parallelogrammum æquale eſt rectilineo D. ergo & rectilineum KGH ipſi D eſt æquale: eſt autem GKH ſimile rectilineo ABC. Dato igitur rectilineo ABC ſimile, & alteri dato D æquale idem conſtitutum eſt KGH. Quod facere oportebat.

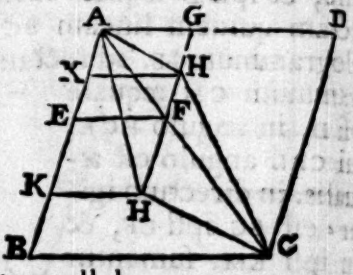


[a] 44. primi.
[b] 45. primi.
[c] 14. primi.
[d] 13. hujus.
[e] 18. hujus.
[f] 2. Cor. 20. hujus.
[g] 1. hujus.
[h] 11. quinti.
[i] 16. quinti.

PROP. XXVI. THEOR.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem ipſi angulum habens, circa eandem diametrum eſt toti.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AF auferatur, ſimile ipſi ABCD, & ſimiliter poſitum communemque ipſi angulum habens DAB. Dico parallelogrammum ABCD circa eandem eſſe diametrum parallelogrammo AF. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit parallelogrammi BD diameter AHC, & producatur GF uſque ad H; ducaturque per H alterutri ipſarum AD BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum parallelogrammo KG; & erit [a] parallelogrammum ABCD parallelogrammo KG ſimile. ergo ut [b] DA ad AB, ita GA ad AK. eſt autem & propter ſimilitudinem parallelogrammorum ABCD EG, ut DA ad AB, ita GA ad AE. & [c] igitur ut GA ad AE, ita GA ad AK. quòd cum GA ad utramque ipſarum AK AE eandem proportionem habeat; erit [d] AE ipſi AK æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. quare circa eandem diametrum erit ipſi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem ipſi angulum habens, circa eandem diametrum eſt toti. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 24. hujus
[b] 1. Def. hujus.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.

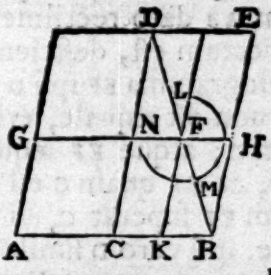
PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, ſimilibus & ſimiliter poſitis ei quæ à dimidia deſcribitur, maximum eſt quod ad dimidiam eſt applicatum, ſimile exiſtens defectui.

Sit recta linea AB; ſeceturque bifariam in C; & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma CE, ſimili & ſimiliter poſita ei quæ à dimidia ipſius AB deſcripta eſt. Dico omnium

paralle-

parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, & ſimiliter poſitis ipſi CE, maximum eſſe AD. Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma HK ſimili, & ſimiliter poſita ipſi CE. Dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus eſſe.



Quoniam enim ſimile eſt parallelogrammum CB parallelogrammo HK, circa eandem diametrum [a] ſunt. ducatur eorum diameter DB, & deſcribatur figura. quoniam igitur CF [b] eſt æquale ipſi FE, commune apponatur HK. totum igitur CH toti KE eſt æquale. ſed CH eſt [c] æquale GC, quoniam & recta linea AC ipſi CB. ergo & GC ipſi EK æquale eſt. commune apponatur CF. totum igitur AF eſt æquale gnomoni LMN: quare & CE, hoc eſt AD parallelogrammum parallelogrammo AF eſt majus. Omnium igitur parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, & ſimiliter poſitis ei quæ à dimidia deſcribitur, maximum eſt quod ad dimidiam eſt applicatum. Quod demonſtrare oportebat..

[a] 26. hujus.
[b] 43. primi.
[c] 36. primi.

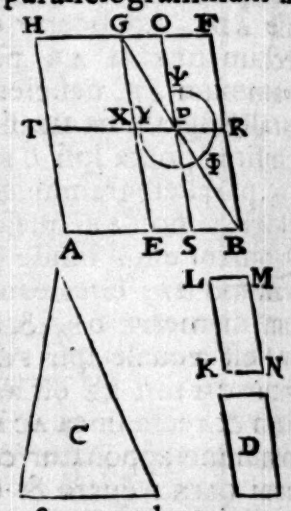
PROP. XXVIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quæ ſimilis ſit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non majus eſſe eo quod ad dimidiam applicatur, ſimilibus exiſtentibus defectibus, & eo quod à dimidia, & eo cui oportet ſimile deficere.

Sit data quidem recta linea AB: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, ſit C, non majus exiſtens eo quod ad dimidiam applicatum eſt, ſimilibus exiſtentibus defectibus: cui autem oportet ſimile deficere ſit D. Oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit ipſi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipſa EB deſcribatur [a] ſimile, & ſimiliter poſitum ipſi D; quod ſit EBFG, & compleatur AG parallelogrammum. itaque AG vel æquale eſt ipſi C, vel eo

[a] 18. hujus.

majus, ob determinationem: & ſi quidem AG ſit æquale C, factum jam erit quod proponebatur: etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma EF ipſi D ſimili. ſi autem non eſt æquale, erit HE majus quàm C; atque EF æquale eſt HE. ergo, & EF quàm C eſt majus. quo autem EF ſuperat C, ei exceſſui æquale, ipſi vero D ſimile & ſimiliter poſitum, idem [a] conſtituatur KLMN. ſed D eſt ſimile EF. quare & KM ipſi EF ſimile erit. ſit igitur recta linea KL homologa ipſi GE, LM vero ipſi GF. & quoniam æquale eſt EF ipſis C & KM, erit EF ipſo KM majus. major [b] igitur eſt recta linea GE ipſa KL & GF ipſa LM. ponatur GX æqualis KL, & GO æqualis LM, & compleatur XGOP parallelogrammum. æquale igitur eſt & ſimile XO ipſi KM. ſed KM ſimile eſt EF. ergo & [c] XO ipſi EF eſt ſimile. circa eandem igitur eſt [d] diametrum XO ipſi EF. ſit ipſorum diameter GPB & figura deſcribatur. itaque quoniam EF eſt æquale ipſis C & KM ſimul, quorum XO eſt æquale KM, erit reliquus ΥΦΨ gnomon æqualis reliquo C. & quoniam OR eſt [e] æquale XS, commune apponatur SR. totum igitur OB toti XB eſt æquale. ſed XB eſt [f] æquale TE, quoniam & latus AE lateri EB. quare & TE ipſi OB æquale. commune apponatur XS. ergo totum TS eſt æquale toti gnomoni ΥΦΨ. at ΥΦΨ gnomon ipſi C oſtenſus eſt æqualis: & TS igitur ipſi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum TS applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma SR ipſi D ſimili, quoniam & SR ſimile eſt ipſi GB. Quod facere oportebat.



[a] 25. hujus.

[b] Cor. 20. hujus.

[c] 21. hujus.

[d] 26. hujus.

[e] 43. primi.

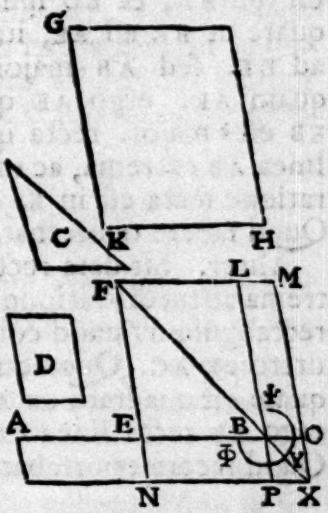
[f] 36. primi.

PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri datæ.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipſam AB applicare, ſit C; cui autem oportet ſimile excedere D. Oportet ad rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura

figura parallelogramma ſimili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipſi D ſimile, & ſimiliter [a] poſitum parallelogrammum deſcribatur EL. & utriuſque quidem EL & C æquale, ipſi vero D ſimile, & ſimiliter poſitum idem [b] conſtituatur GH. ſimile igitur eſt GH ipſi EL. ſitque KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipſi FE. & quoniam parallelogrammum GH majus eſt ipſo EL, erit recta linea KH major quàm FL, & KG major quàm FE. producantur FL FE, & ipſi quidem KH æqualis ſit FLM, ipſi vero KG æquails FEN, & compleatur MN parallelogrammum. ergo MN æquale eſt & ſimile ipſi GH. ſed GH eſt ſimile EL; MN igitur ipſi EL ſimile [c] erit; ac propterea circa eandem diametrum [d] eſt EL ipſi MN. ducatur ipſorum diameter FX, & figura deſcribatur. itaque quoniam GH ipſi EL & C eſt æquale, ſed GH eſt æquale MN; erit & MN æquale ipſi EL & C. commune auferatur EL. reliquus igitur ΦΥΨ gnomon ipſi C eſt æqualis. ſed quoniam AE eſt æqualis EB, æquale [e] erit & AN parallelogrammum parallelogrammo EP, hoc eſt ipſi [f] LO. commune apponatur EX. totum igitur AX æquale eſt gnomoni ΦΥΨ. ſed ΦΥΨ gnomon eſt æqualis C. ergo & AX ipſi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum eſt AX, excedens figura parallelogramma PO, ipſi D ſimili, quoniam & ipſi EL ſimile [g] eſt OP. Quod feciſſe oportebat.



[a] 18. hujus.
[b] 25. hujus.
[c] 21. hujus.
[d] 26. hujus.
[e] 36. primi.
[f] 43. primi.
[g] 24. hujus.

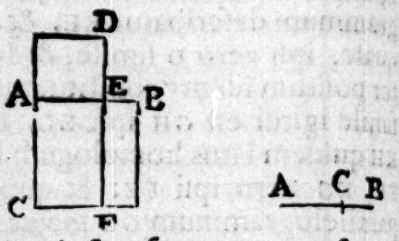
PROP. XXX. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione ſecare.

Sit data recta linea terminata AB oportet ipſum AB extrema ac media ratione ſecare. Deſcribatur [a] ex AB quadratum BC, & ad AC ipſi BC æquale parallelogrammum [b] applicetur CD, excedens [b] figura AD ipſi BC ſimili. quadratum autem eſt BC, ergo & AD quadratum erit. & quoniam BC eſt æquale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD eſt æquale. eſt autem & ipſi æquiangulum. ergo ipſorum BF AD latera, quæ circum æquales

[a] 46. primi.
[b] 29. hujus.

angulos, reciproce ſunt proportionalia. ut igitur FE ad ED, ita eſt AE ad EB. eſt autem FE æqualis AC, hoc eſt ipſi AB; & ED ipſi AE. quare ut BA ad AE, ita AE ad EB. ſed AB major eſt quam AE. ergo AE quam EB eſt major. recta igitur linea AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in E. & majus ipſius ſegmentum eſt AE. Quod facere oportebat.

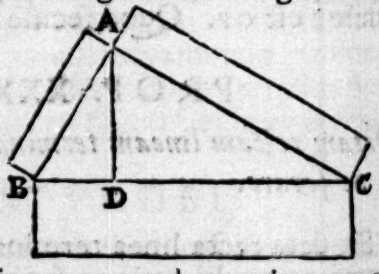


Aliter. Sit data recta linea AB. Oportet ipſam AB extrema ac media ratione ſecare. Secetur enim AB in C, ita ut rectangulum quod continetur ſub AB BC æquale ſit quadrato ex AC. Quoniam igitur rectangulum ſub AB BC æquale eſt quadrato ex AC, erit ut BA ad AC ita AC ad CB. ergo AB recta linea extrema ac media ratione ſecta eſt. Quod facere oportebat.

PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis figura quæ fit à latere rectum angulum ſubtendente, æqualis eſt eis quæ à lateribus rectum angulum contentibus fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram, quæ fit ex BC æqualem eſſe eis quæ ex BA AC fiunt ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. Ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectangulo ACB ab angulo recto, qui eſt ad A, ad BC baſim perpendicularis ducta eſt AD, erunt triangula ABD ADC quæ ſunt ad perpendicularem ſimilia toti ABC, & inter ſe. & quoniam ſimile eſt ABC triangulum triangulo ABD, erit ut CB ad BA, ita BA ad BD. quod cum tres rectæ lineæ proportionales ſint, ut prima ad tertiam, ita erit figura quæ fit ex prima ad eam quæ ex ſecunda, ſimilem, & ſimiliter deſcriptam. ut igitur CB ad BD, ita figura quæ fit ex CB ad eam quæ ex BA, ſimilem & ſimiliter deſcriptam. eadem ratione, & ut BC ad CD, ita figura quæ fit ex BC ad eam quæ ex CA. quare & ut BC ad



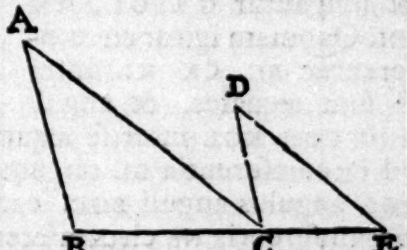
ipſas,

ipſas BD DC, ita [c] figura quæ ex BC ad eas quæ ex BA AC, ſimiles, & ſimiliter deſcriptas. æqualis autem eſt BC ipſis BD DC. ergo figura quæ fit ex BC æqualis eſt eis quæ ex BA AC fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum ſubtendente, æqualis eſt eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. Quod oſtendere oportebat. [c] 24. quinti.

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipſorum etiam ſint parallela, reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt.

Sint duo triangula ABC DCE quæ duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, ſcil. ſit ſicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem ſit AB ipſi DC & AC ipſi DE. Dico BC ipſi CE in directum eſſe. Quoniam enim AB parallela eſt DC, & in ipſas incidit recta linea AC; erunt [a] anguli alterni BAC ACD æquales inter ſe. eadem ratione, & angulus CDE æqualis eſt angulo ACD. quare & BAC ipſi CDE eſt æqualis. & quoniam duo triangula ſunt ABC DCE, unum angulum ad A, uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod ſit ut BA ad AC, ita CD ad DE; erit [b] triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum. ergo ABC angulus eſt æqualis angulo DCE. oſtenſus autem eſt & angulus ACD æqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC eſt æqualis. communis apponatur ACB. ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales ſunt. ſed BAC ACB CBA anguli duobus rectis [c] ſunt æquales. & anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipſa C, duæ rectæ lineæ BC CE non ad eaſdem partes poſitæ, angulos qui deinceps ſunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipſi CE in directum [d] erit. Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant



[a] 29. primi.

[b] 6. hujus.

[c] 32. primi.

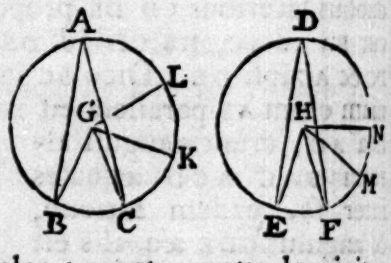
[d] 14. primi.

beant, ita ut homologa latera ipſorum etiam ſunt parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ quibus inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant: adhuc autem & ſectores, quippe qui ad centra ſunt conſtituti.

Sint æquales circuli ABC DEF; & ad centra quidem ipſorum G H ſint anguli BGC EHF, ad circumferentias vero anguli BAC EDF. Dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita eſſe & BGC angulum ad angulum EHF, & angulum BAC ad angulum EDF: & adhuc ſectorem BGC ad EHF ſectorem. Ponantur enim circumferentiæ quidem BC æquales quotcunque deinceps CK KL; circumferentiæ vero EF, rurſus æquales quotcunque FM MN. & jungantur GK GL, HM HN. Quoniam igitur circumferentiæ BC CK KL inter ſe ſunt æquales, & anguli BGC CGK KGL inter ſe æquales [a] erunt. quotuplex igitur eſt circumferentia BL circumferentiæ BC, totuplex eſt & BGL angulus anguli BGC. eadem ratione & quotuplex eſt circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex & EHN angulus anguli EHF. ſi vero æqualis eſt BL circumferentia circumferentiæ EN; & angulus BGL angulo EHN erit æqualis; & ſi circumferentia BL major eſt circumferentia EN, major erit & BGL angulus angulo EHN; & ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC EF, & duobus angulis BGC EHF; ſumptæ ſunt circumferentiæ quidem BC, & BGC anguli, æque multiplicia, videlicet circumferentia BL & BGL angulus; circumferentiæ vero EF, & EHF anguli, æque multiplicia, nempe circumferentia EN, & angulus EHN. atque oſtenſum eſt ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, & BGL angulum ſuperare angulum EHN; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem eſſe. ut [b] igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum EHF. ſed ut BGC angulus ad angulum EHF, ita

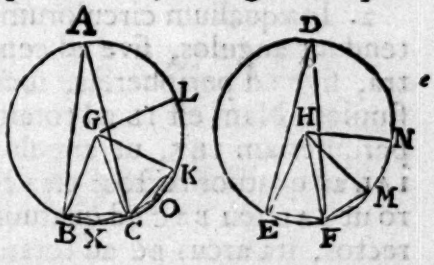


[a] 27. tertii.

[b] Def. 5. quinti.

angulus

[c] angulus BAC ad EDF angulum, uterque enim utriuſque eſt [d] duplex. & ut igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem quàm circumferentiæ quibus inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant. Dico inſuper & ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita eſſe ſectorem GBC ad HEF ſectorem. Jungantur enim BC CK, & ſumptis in circumferentiis BC CK punctis XO, jungantur & BX XC CO OK. itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales ſunt, & angulos æquales continent; erit & baſis BC baſi CK æqualis. æquale [e] igitur eſt GBC triangulum triangulo GCK. & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK eſt æqualis, & reliqua circumferentia quæ complet totum circulum ABC



æqualis eſt reliquæ quæ eundem circulum complet. quare & angulus BXC angulo COK eſt [f] æqualis. ſimile igitur eſt BXC ſegmentum [g] ſegmento COK: & ſunt in æqualibus rectis lineis BC CK. quæ autem in æqualibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta, & inter ſe [h] æqualia ſunt. ergo ſegmentum BXC eſt æquale ſegmento COK. eſt autem & BGC triangulum triangulo CGK æquale. & totus igitur ſector BGC ſectori CGK æqualis erit. Eadem ratione & GKL ſector utrique ipſorum GBC GCK eſt æqualis. tres igitur ſectores BGC CGK KGL æquales ſunt inter ſe. ſimiliter & ſectores HEF HFM HMN inter ſe ſunt æquales. quotuplex igitur eſt LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex eſt & GBL ſector ſectoris GBC. eadem ratione & quotuplex eſt circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex eſt & HEN ſector ſectoris HEF. Sed ſi circumferentia BL circumferentiæ EN eſt æqualis, & ſector BGL æqualis eſt ſectori EHN; & ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, ſuperat & BGL ſector ſectorem EHN; & ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF circumferentiis, duobus vero ſectoribus GBC EHF, ſumpta, ſunt æque multiplicia circumferentiæ quidem BC & GBC ſectoris, circumferentia BL, & GBL ſector. circumferentiæ vero EF, & ſectoris HEF, æque multiplicia, circumferentia EN, & HEN ſector, atque oſtenſum eſt ſi BL circumferentia ſuperat circumferentiam EN, & ſectorem BGL ſuperare ſectorem EHN; & ſi æqualis, æqualem eſſe; & ſi minor, minorem.

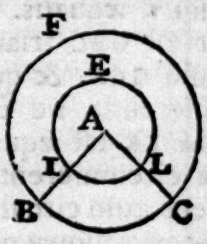
[c] 15. quinti.
[d] 20. tertii.
[e] 4. primi.
[f] 27. tertii.
[g] 11. Def. tertii.
[h] 24. tertii.

b Def. 5. quinti. minorem. eſt b igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita ſector GBC ad HEF ſectorem. Quod oſtendere oportebat.

COROLL.

1. Angulus ad centrum eſt ad quatuor rectos, ut arcus cui inſiſtit ad totam circumferentiam: nam ut angulus BAC ad rectum, ita BC arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando conſequentes, erit angulus BAC ad quatuor rectos, ut arcus BC ad totam circumferentiam.

2. Inæqualium circulorum arcus IL BC qui æquales ſubtendunt angulos, ſive ad centra, ſive ad peripherias, ſunt ſimiles. Nam eſt IL ad totam peripheriam ILE, ut angulus IAL ad quatuor rectos: eſt vero ut IAL ſeu BAC ad quatuor rectos, ita arcus BC ad totam peripheriam BCF. quare ut IL ad totam peripheriam ILE, ita BC ad totam peripheriam BCF. ac proinde arcus IL BC ſunt ſimiles.



3. Duæ ſemidiametri AB AC à concentricis peripheriis arcus auferunt ſimiles IL BC.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

I.

SOlidum eſt, quod longitudinem, latitudinem & craſſitudinem habet.

II.

Solidi terminus eſt ſuperficies.

III.

Recta linea ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt, & in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad Planum rectum eſt, cum rectæ lineæ quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt, cum à ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque à puncto quod perpendicularis in ipſo plano effecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adjuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea, & adjuncta comprehenſus.

VI.

VI.

Plani ad planum inclinatio est, angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

VIII.

Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

X

Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus est, plurium quàm duarum linearum quæ se mutuo contingunt, nec in eadem sunt superficie, ad omnes lineas inclinatio. Vel solidus angulus est, qui pluribus quàm duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis continetur.

XII.

Pyramis est figura solida planis comprehensa, quæ ab uno plano ad unum punctum constituuntur.

XIII.

Prisma est figura solida quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia & similia, & parallela; alia vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in seipsum rursus revolvitur unde moveri cœperat.

XV.

XV.

Axis autem ſphæræ eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus convertitur.

XVI.

Centrum ſphæræ eſt idem quod & ſemicirculi.

XVII.

Diameter autem ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à ſphæræ ſuperficie terminata.

XVIII.

Conus eſt, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde moveri cœperat. Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: ſi vero minor, amblygonius: ſi vero major, oxygonius.

XIX.

Axis autem coni eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

XX.

Baſis vero coni eſt circulus qui à circumducta recta linea deſcribitur.

XXI.

Cylindrus eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde cœperat moveri.

XXII.

Axis autem cylindri eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Baſes vero cylindri ſunt circuli à duobus adverſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

XXIV.

Similes coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

XXV.

XXV.

Cubus eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icoſaedrum eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

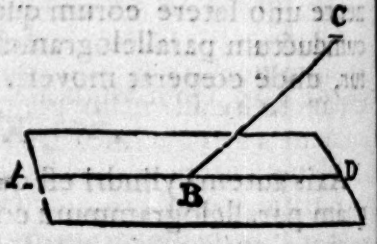
XXX.

Parallelipipedum eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverſo parallelæ ſunt, contenta.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi.

Si enim fieri poteſt, rectæ lineæ AB pars quidem AB ſit in ſubjecto plano, pars vero BC in ſublimi. erit recta linea quædam ipſi AB in directum continuata in ſubjecto plano. ſitque DB. duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD commune ſegmentum eſt AB, quod fieri non poteſt: recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis, quàm uno. Non igitur rectæ lineæ pars quædam eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod demonſtrare oportebat.

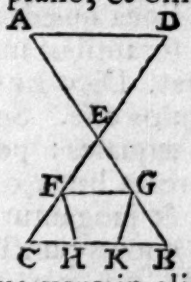


PROP.

PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent, in uno ſunt plano, & omne triangulum in uno plano conſiſtit.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD ſe invicem in puncto E ſecent. Dico ipſas AB CD in uno eſſe plano, & omne triangulum in uno plano conſiſtere. Sumantur enim in ipſis EB EC quævis puncta FG; junganturque CB FG, & FH GK ducantur. Dico primum EBC triangulum conſiſtere in uno plano. ſi enim trianguli EBC pars quædam FHC, vel GBK in ſubjecto plano eſt, reliqua vero in alio plano; erit & linearum EB EC pars in ſubjecto plano, & pars in alio. quod ſi trianguli ECB pars FCBG ſit in ſubjecto plano, reliqua vero in alio, utrarumque rectarum linearum EC EB quædam pars erit in ſubjecto plano, quædam vero in alio. quod abſurdum eſſe [a] oſtendimus. triangulum igitur EBC in uno eſt plano. in quo autem plano eſt BCE triangulum, in hoc eſt utraque ipſarum EC EB: in quo autem utraque ipſarum EC EB, in hoc [a] ſunt & AB CD. Ergo rectæ lineæ AB CD in uno ſunt plano, & omne triangulum in uno plano conſiſtit. Quod erat demonſtrandum.

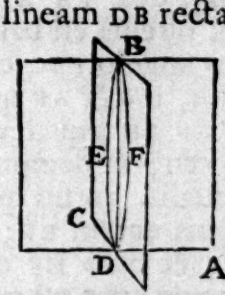


[a] 1. hujus.

PROP. III. THEOR.

Si duo plana ſe invicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit.

Duo plana AB BC ſe invicem ſecent, communis autem ipſorum ſectio ſit DB linea. Dico lineam DB rectam eſſe. Si enim non ita ſit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB; in plano autem BC recta linea DFB. erunt utique duarum rectarum linearum DEB DFB iidem termini, & ipſæ ſpatium continebunt, quod eſt abſurdum [a]. non igitur DEB DFB rectæ lineæ ſunt. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto D ab B ducitur rectam eſſe, præter ipſam DB communem ſcilicet planorum AB BC ſectionem. Si igitur duo plana ſe invicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit. Quod oſtendere oportebat.

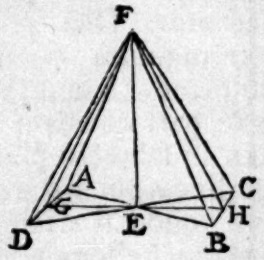


[a] Axio. 10. primi.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis ſe invicem ſecantibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD ſe invicem ſecantibus in E puncto, ab ipſo E ad rectos angulos inſiſtat. Dico EF etiam plano per AB CD ducto ad rectos angulos eſſe. Sumantur rectæ lineæ EA EB CE DE inter ſe æquales: perque E ducatur recta linea GEH utcunque: & jungantur AD CB; deinde à quovis puncto F ducantur FA FG FD FC FH FB. & quoniam duæ rectæ lineæ AE ED duabus rectis lineis CE EB æquales ſunt, &



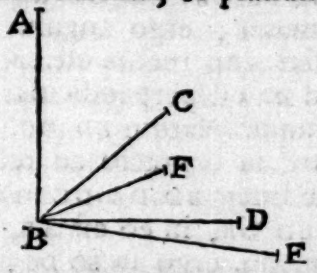
a 15. primi. angulos a æquales AED CEB continent, erit b AD baſis baſi
b 4. primi. CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale. ergo & angulus DAE æqualis eſt angulo EBC. eſt autem & angulus AEG a æqualis angulo BEH. duo igitur triangula ſunt AGE BEH, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus AE uni lateri EB æquale quod eſt ad æquales angulos. quare & reliqua latera
c 26. primi. reliquis lateribus æqualia habebunt c. ergo GE quidem eſt æqualis EH; AG vero ipſi BH. quod cum AE ſit æqualis EB, communis autem, & ad rectos angulos FE; erit b baſis AF baſi FB æqualis; eadem quoque ratione & CF æqualis erit FD. præterea quoniam AD eſt æqualis CB, & AF ipſi FB, erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera al-
d 8. primi. teri; & oſtenſa eſt baſis DF æqualis baſi FC. angulus d igitur FAD angulo FBC eſt æqualis. rurſus oſtenſa eſt AG æqualis BH, ſed & AF ipſi FB eſt æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales ſunt, & angulus FAG æqualis eſt angulo FBH; ut demonſtratum fuit, baſis igitur GF baſi FH eſt b æqualis. rurſus quoniam GE oſtenſa eſt æqualis EH, communis autem EF; erunt duæ GE EF æquales duabus HE EF; & baſis HF eſt æqualis baſi FG. angulus d igitur GEF angulo HEF eſt æqualis, & idcirco rectus eſt uterque angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH utcunque per E ductam rectos efficit angulos. ſimiliter oſtendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad
e 3. Def. hujus. planum recta eſt e quando ad omnes rectas lineas ipſam contingentes,

tingentes, & eodem exiſtentes plano rectos efficit angulos. quare FE ſubjecto plano ad rectos angulos inſiſtit. at ſubjectum planum eſt quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis ſe invicem ſecantibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea tribus rectis lineis ſeſe tangentibus, in communi ſectione, ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

Recta linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE, in contactu B, ad rectos angulos inſiſtat. Dico BC BD BE in uno plano eſſe. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſint BD BE quidem in ſubjecto plano; BC vero in ſublimi, & planum per AB BC producatur. communem utique ſectionem in ſubjecto plano faciet [a] rectam lineam; faciat BF. in uno igitur ſunt plano per AB BC ducto, tres rectæ lineæ AB BC BF. & quoniam AB utrique ipſarum BD BE ad rectos angulos inſiſtit, & ducto per ipſas DB BE plano [b] ad rectos angulos erit. planum autem per DB BE eſt ſubjectum planum. ergo AB ad ſubjectum planum recta eſt. quare & ad [c] omnes rectas lineas ipſam contingentes, quæ in eodem plano ſunt, rectos faciet angulos; ſed ipſam tangit BF in ſubjecto exiſtens plano. ergo angulus ABF rectus eſt. ponitur autem & ABC angulus rectus. æqualis igitur eſt angulus ABF angulo ABC, & in eodem ſunt plano; quod fieri non poteſt. recta igitur linea BC non eſt in ſublimi; quare tres rectæ lineæ BC BD BE in uno ſunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis ſeſe tangentibus, in communi ſectione, ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 3. hujus.

[b] 4. hujus.

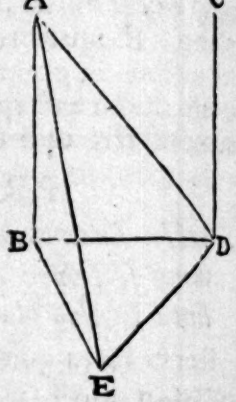
[c] 3. Def. hujus.

PROP. VI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter ſeſe parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD ſubjecto plano ſint ad rectos augulos. Dico AB ipſi CD parallelam eſſe. Occurrant

enim ſubjecto plano in punctis B D, jungaturque BD recta linea, cui ad rectos angulos in ſubjecto plano ducatur DE, & poſita DE ipſi AB æquali, jungantur BE AE AD. Quoniam igitur AB recta eſt ad ſubjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt, & in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos [a] efficiet. contingit autem AB utraque ipſarum BD BE exiſtens in ſubjecto plano. ergo uterque angulorum ABD ABE rectus eſt. eadem ratione rectus etiam eſt uterque ipſorum CDB CDE. & quoniam AB æqualis eſt ipſi DE, communis autem BD. erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales, & rectos angulos continent; baſis igitur AD baſi BE eſt [b] æqualis. rurſus quoniam AB eſt æqualis DE, & AD ipſi BE, duæ AB BE duabus ED DA æquales ſunt, & baſis ipſarum AB communis; ergo angulus ABE angulo EDA eſt [c] æqualis. ſed ABE rectus eſt. rectus igitur & EDA; & idcirco ED ad DA eſt perpendicularis. ſed & perpendicularis eſt ad utramque ipſarum BD DC. quare ED tribus rectis lineis BD DA DC in contactu ad rectos inſiſtit angulos. tres igitur rectæ lineæ BD DA DC in uno ſunt [d] plano. in quo autem ſunt BD DA, in eo eſt AB, omne enim triangulum in uno [e] eſt plano. ergo AB BD DC in uno plano ſint neceſſe eſt; atque eſt uterque angulorum ABD BDC rectus. parallela igitur [f] eſt AB ipſi CD. Quare ſi duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter ſe parallelæ erunt. Q.E.D.

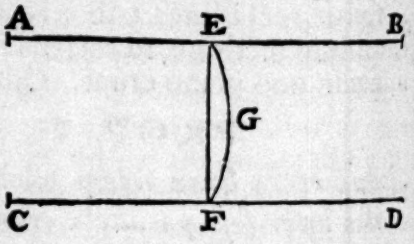


[a] 3. Def. hujus.
[b] 4. primi.
[c] 8. primi.
[d] 5. hujus.
[e] 2. hujus.
[f] 28. primi.

PROP. VII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, ſumantur autem in utraque ipſarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta in eodem erit plano, in quo & parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & in utraque ipſarum ſumantur quælibet puncta EF. Dico rectam lineam quæ puncta E F conjungit, in eodem plano eſſe, in quo ſunt parallelæ. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit in ſublimi, ut EGF, & per EGF, planum ducatur quod in ſubjecto plano ſectionem faciet [a] rectam lineam; faciat



[a] 3. hujus.

ut

ut EF. ergo duæ rectæ lineæ EGF EF ſpatium continebunt, quod fieri non [b] poteſt. non igitur quæ à puncto E ad F ducitur recta linea in ſublimi eſt plano, quare erit in eo quod per AB CD parallelas tranſit. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, &c. Quod oportebat demonſtrare.

[b] 10. axio. primi.

PROP. VIII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, altera autem ipſarum plano alicui ſit ad rectos angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & altera ipſarum AB ſubjecto plano ſit ad rectos angulos. Dico & reliquam CD eidem plano ad rectos angulos eſſe. Occurrant enim AB CD ſubjecto plano in punctis B D, & BD jungatur. ergo AB CD BD in uno ſunt [a] plano. ducatur ipſi BD ad rectos angulos in ſubjecto plano DE: & ponatur DE ipſi AB æqualis: jungunturque BE AE AD. & quoniam AB perpendicularis eſt ad ſubjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt ſuntque in ſubjecto plano, perpendicularis [b] erit. rectus igitur eſt uterque angulorum ABD ABE. quod cum in parallelas rectas lineas AB CD recta incidit BD, erunt anguli ABD CDB duobus rectis [c] æquales. rectus autem eſt ABD. ergo & CDB eſt rectus; ac propterea CD perpendicularis eſt ad BD. & quoniam AB eſt æqualis DE, communis autem BD, duæ AB BD duabus ED DB æquales ſunt; & angulus ABD eſt æqualis angulo EDB, rectus enim uterque eſt, baſis igitur AD baſi BE eſt [d] æqualis. rurſus quoniam AB æqualis eſt DE, & BE ipſi AD; erunt duæ AB BE duabus ED DA æquales, altera alteri; & baſis earum communis AE. quare angulus ABE eſt [e] æqualis angulo EDA. rectus autem eſt ABE. ergo & EDA eſt rectus, & ED ad DA perpendicularis. ſed & perpendicularis eſt ad BD. ergo ED etiam ad planum per BD DA perpendicularis [f] erit, & ad omnes rectas lineas quæ in eodem exiſtentes plano ipſam contingunt, rectos [g] faciet angulos. at in plano per BD DA eſt DC, quoniam in plano per BD DA ſunt [h] AB BD: in quo autem ſunt AB BD in eodem [i] eſt ipſa DC. quare ED ipſi CD eſt ad rectos angulos: ideoque CD ad rectos angulos eſt ipſi DE; ſed & etiam ipſi DB. ergo CD duabus rectis lineis DE DB ſe mutuo ſecantibus in communi ſectione D ad rectos angulos inſiſtit; ac propterea plano per DE DB eſt [f] ad rectos angulos. planum autem per DE DB eſt ſubjectum planum. Ergo CD ſubjecto plano ad rectos angulos erit. Quod demonſtrare oportebat.

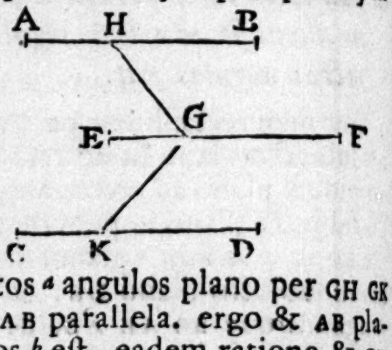
Vide figuram Prop. ſextæ.

[a] 7. hujus.
[b] 3. Def. hujus.
[c] 29. primi.
[d] 4. primi.
[e] 8. primi.
[f] 4. hujus
[g] 3. Def. hujus.
[h] 2. hujus.
[i] 7. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, non exiſtentes in eodem in quo ipſæ plano, etiam inter ſe parallelæ erunt.

Sit utraque ipſarum AB CD parallela ipſi EF, non exiſtentes in eodem, in quo ipſa plano. Dico AB ipſi CD parallelam eſſe. Sumatur in EF quodvis punctum G, à quo ipſi EF, in plano quidem per EF AB tranſeunte, ad rectos angulos ducatur GH; in plano autem tranſeunti per EF CD, rurſus ducatur ipſi EF ad rectos angulos GK. & quoniam EF ad utramque ipſarum GH GK eſt perpendicularis, erit EF etiam ad rectos [a] angulos plano per GH GK tranſeunte. atque eſt EF ipſi AB parallela. ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos [b] eſt. eadem ratione & CD plano per HGK eſt ad rectos angulos. utraque igitur ipſarum AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ [c] erunt inter ſe. Ergo AB ipſi CD eſt parallela. Quod demonſtrare oportebat.

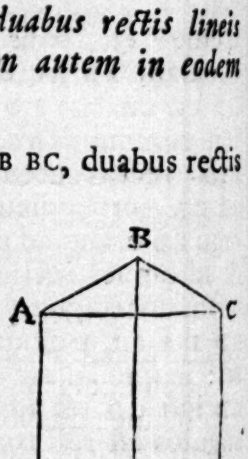


[a] 4. hujus.
[b] 8. hujus.
[c] 6. hujus.

PROP. X. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ ſeſe contingentes, duabus rectis lineis ſeſe contingentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ rectæ lineæ ſeſe contingentes AB BC, duabus rectis lineis DE EF ſeſe contingentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF æqualem eſſe. Aſſumantur enim BA BC ED EF inter ſe æquales; & jungantur AD CF BE AC DF. quoniam igitur BA ipſi ED æqualis eſt & parallela, erit & [a] AD æqualis & parallela ipſi BE. eadem ratione & CF ipſi BE æqualis & parallela erit. utraque igitur ipſarum AD CF ipſi BE æqualis eſt & parallela. quæ autem eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, non exiſtentes in eodem plano; & inter



[a] 33. primi.

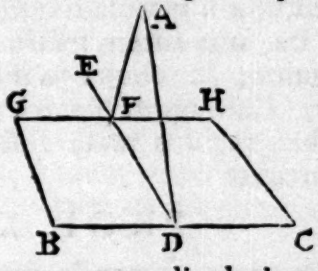
ter ſe parallelæ [b] erunt. ergo AD parallela eſt ipſi CF & æqualis. atque ipſas conjungunt AC DF; & AC igitur ipſi DF æqualis eſt & [c] parallela. & quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus DE EF æquales ſunt, & baſis AC eſt æqualis baſi DF; erit [d] angulus ABC angulo DEF æqualis. Si igitur duæ rectæ lineæ ſeſe contingentes, duabus rectis lineis ſeſe contingentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. Quod oportebat demonſtrare.

[b] 9. hujus.
[c] 33. primi.
[d] 8. primi.

PROP. XI. PROBL.

A dato puncto in ſublimi, ad ſubjectum planum, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in ſublimi A, datum autem ſubjectum planum BH. Oportet à puncto A ad ſubjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In ſubjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque BC, & à puncto A ad BC perpendicularis agatur [a] AD. ſiquidem igitur AD perpendicularis ſit etiam ad ſubjectum planum; factum jam erit, quod proponebatur: ſin minus; ducatur à puncto D ipſi BC, in ſubjecto plano, ad rectos



[a] 12. primi.

[b] angulos DE: & à puncto A ad DE perpendicularis [a] ducatur AF. denique per F ducatur GH ipſi BC [c] parallela. Quoniam BC utrique ipſarum DA DE eſt ad rectos angulos, erit [d] & BC ad rectos angulos plano per DA DE tranſeunti. quin ipſi BC parallela eſt GH; ſi autem ſint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui ſit ad rectos angulos; & reliqua [e] eidem plano ad rectos angulos erit. quare & GH plano per ED DA tranſeunti ad rectos angulos eſt: ac propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano exiſtentes ipſam contingunt eſt *f* perpendicularis. contingit autem ipſam AF exiſtens in plano per ED DA. ergo GH perpendicularis eſt ad AF. & ob id AF eſt perpendicularis ad GH: eſt autem AF ad DE perpendicularis. ergo AF perpendicularis eſt ad utramque ipſarum HG DE. ſi autem recta linea duabus rectis lineis ſeſe contingentibus, in communi ſectione, ad rectos angulos inſiſtat, etiam plano per ipſas ducto ad rectos angulos [d] erit. quare AF plano per ED GH ducto eſt ad rectos angulos. planum autem per ED GH eſt ſubjectum planum. ergo AF ad ſubjectum planum eſt perpendicularis. A dato igitur puncto ſublimi A, ad

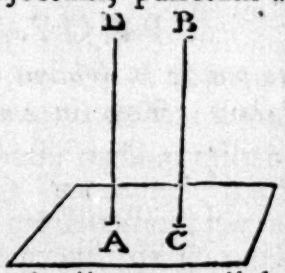
[b] 11. primi.
[c] 31. primi.
[d] 4. hujus.
[e] 8. hujus.
[f] 3 Def. hujus.

ſubjectum planum, perpendicularis recta linea ducta eſt AF. Quod facere oportebat.

PROP. XII. PROBL.

Dato plano, à puncto quod in ipſo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam conſtituere.

Sit datum quidem planum ſubjectum, punctum autem quod in ipſo ſit A. Oportet à puncto A ſubjecto plano ad rectos angulos rectam lineam conſtituere. Intelligatur aliquod punctum ſublime B, à quo ad ſubjectum planum a-

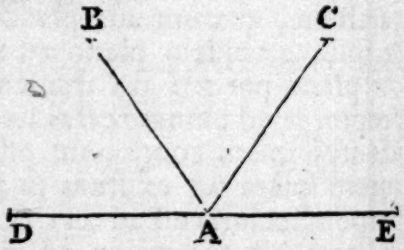


a 11. hujus. gatur a perpendicularis BC;
b 31. primi & per A ipſi BC parallela b ducatur AD. quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ ſunt AD CB, una autem ipſarum BC ſubjecto plano eſt ad rectos
c 8. hujus. angulos; & reliqua c AD ſubjecto plano ad rectos angulos erit. Dato igitur plano à puncto quod in ipſo eſt datum, ad rectos angulos recta linea conſtituta eſt. Quod facere oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Dato plano, à puncto quod in ipſo eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non conſtituentur ex eadem parte.

Si enim fieri poteſt, dato plano, à puncto quod in ipſo eſt A, duæ rectæ lineæ AB AC ad rectos angulos conſtituantur ex eadem parte: & ducatur planum per BA AC, quod faciet ſectionem per A in



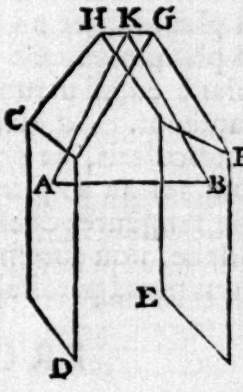
a 3. hujus. ſubjecto plano a rectam lineam. faciat DAE. ergo rectæ lineæ AB AC DAE in uno ſunt plano. & quoniam CA ſubjecto plano ad rectos an-
b 3. Def. hujus. gulos eſt, & ad b omnes rectas lineas, quæ in ſubjecto plano exiſtentes ipſam contingunt, rectos faciet angulos. contingit autem ipſam DAE, quæ eſt in ſubjecto plano. angulus igitur CAE rectus eſt. eadem ratione & rectus eſt BAE. ergo angulus CAE ipſi BAE eſt æqualis. & in uno ſunt plano,
c 9. axiom. primi. quod fieri non c poteſt. Non igitur dato plano, à puncto, quod in ipſo eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos conſtituentur ex eadem parte. Quod oportebat demonſtrare.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Ad quæ plana, eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt.

Recta quædam linea AB ad utrumque ipſorum planorum CD EF ſit perpendicularis. Dico ea plana parallela eſſe. Si enim non ita ſit, producta convenient inter ſe: conveniant, & communem ſectionem faciant rectam lineam GH; & in ipſa GH ſumpto quovis puncto K, jungatur AK BK. Quoniam igitur AB perpendicularis eſt ad EF planum; erit & perpendicularis ad ipſam BK [a] rectam lineam in plano EF producto exiſtentem. quare angulus ABK rectus eſt. eadem ratione & BAK eſt rectus: ideoque trianguli ABK duo anguli ABK BAK duobus rectis ſunt æquales, quod fieri non [b] poteſt. non igitur plana CD EF producta inter ſe convenient. quare CD EF parallela ſint neceſſe eſt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt. Quod demonſtrare oportebat.



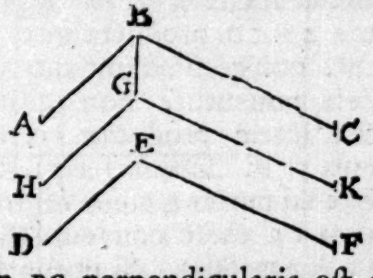
[a] 3. Def. hujus.

[b] 17. primi.

PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt.

Duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes AB BC, duabus rectis lineis ſeſe tangentibus DE EF parallelæ ſint, & non in eodem plano. Dico plana quæ per AB BC, DE EF tranſeunt, ſi producantur, inter ſe non convenire. Ducatur à puncto B ad planum, quod per DE EF tranſit, perpendicularis BG, quæ plano in puncto G occurrat, & per G ducatur ipſi quidem ED parallela GH; ipſi vero EF parallela GK. itaque quoniam BG perpendicularis eſt ad planum per DE EF; & ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano, rectos faciet [a] angulos. contingit autem ipſam utraque earum GH GK, quæ ſunt in eodem



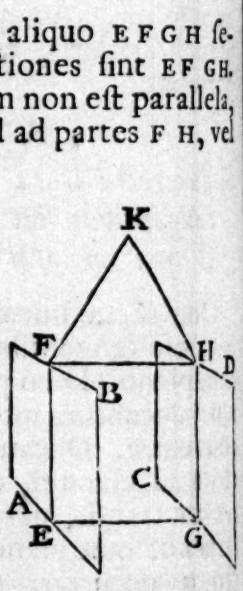
[a] 3. Def. hujus.

eodem plano. rectus igitur eſt uterque angulorum BGH BGK. & quoniam BA parallela eſt ipſi GH, anguli GBA
b 29. primi. BGH duobus rectis ſunt b æquales. rectus autem eſt BGH. ergo & GBA rectus erit, ideoque GB ad BA eſt perpendicularis. eadem ratione & GB eſt perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC ſe invicem ſecantibus ad rectos angulos inſiſtat; erit BG etiam
c 4. hujus. ad planum per BA BC ductum c perpendicularis. atque eſt ad planum per DE EF perpendicularis. ergo BG perpendicularis eſt ad utrumque planorum quæ per AB BC, DE EF tranſeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea eſt per-
d 14. hujus. pendicularis, ea parallela d ſunt. parallelum igitur eſt planum per AB BC plano per DE EF. Quare ſi duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelæ erunt.

Duo plana parallela AB CD à plano aliquo EFGH ſecentur; communes autem ipſorum ſectiones ſint EF GH. Dico EF ipſi GH parallelam eſſe. Si enim non eſt parallela, productæ EF GH inter ſe convenient, vel ad partes F H, vel ad partes EG. producantur prius ut ad partes F H, & conveniant in K. quoniam igitur EFK eſt in plano AB, & omnia quæ in EFK ſumuntur puncta in eodem plano erunt: unum autem punctorum quæ ſunt in EFK, eſt ipſum K punctum. ergo K eſt in plano AB. eadem ratione & K eſt in CD plano. ergo plana AB CD producta inter ſe convenient. non conveniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectæ lineæ productæ convenient ad partes F H. ſimiliter demonſtrabimus neque ad partes E G convenire, ſi producantur. quæ autem neutra ex parte conveniunt parallelæ ſunt. ergo EF ipſi GH eſt parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelæ erunt. Quod demonſtrare oportebat.

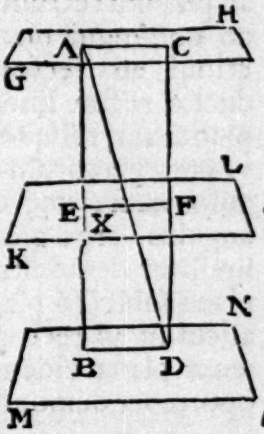


PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis ſecentur planis, in eaſdem proportiones ſecabuntur.

Duæ rectæ lineæ AB CD à parallelis planis GH KL MN ſecentur in punctis A, E, B, C, F, D. Dico ut AE recta linea ad ipſam EB, ita eſſe CF ad FD. Jungantur enim AC BD AD: & occurrat AD plano KL in puncto X: & EX XF jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL MN à plano EBDX ſecantur, communes ipſorum ſectiones EX BD parallelæ [a] ſunt. eadem ratione quoniam duo plana parallela GH KL à plano AXFC ſecantur, communes ipſorum ſectiones AC FX ſunt parallelæ. & quoniam uni laterum trianguli ABD, videlicet ipſi BD parallela ducta eſt EX, ut AE ad EB ita [b] erit AX ad XD. rurſus quoniam uni laterum trianguli ADC, nempe ipſi AC parallela ducta eſt XF, erit ut AX ad XD [b], ita CF ad FD. oſtenſum autem eſt ut AX ad XD, ita eſſe AE ad EB. ut igitur AE ad EB, ita eſt [c] CF ad FD. Quare ſi duæ rectæ lineæ à parallelis ſecentur planis, in eaſdem proportiones ſecabuntur. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 16. hujus.

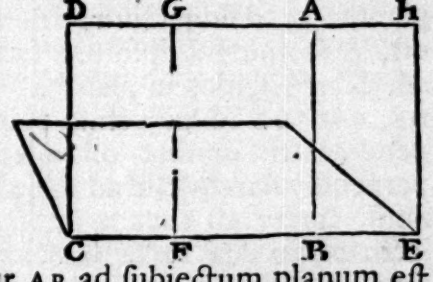
[b] 2. ſexti.

[c] 11. quinti.

PROP. XVIII. THEOR.

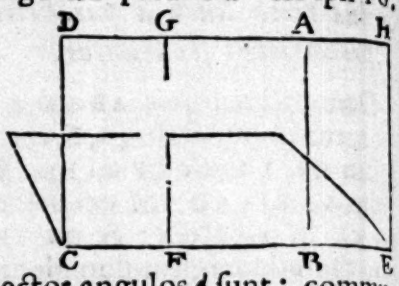
Si recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipſam tranſeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta linea quædam AB ſubjecto plano ſit ad rectos angulos. Dico & omnia plana quæ per ipſam AB tranſeunt, ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe. Producatur enim per AB planum DE, ſitque plani DE, & ſubjecti plani communis ſectio CE: & ſumatur in CE quodvis punctum F; à quo ipſi CE ad rectos angulos, in DE plano, ducatur FG. quoniam igitur AB ad ſubjectum planum eſt perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt & in eodem ſunt plano perpendicularis [a] erit. quare etiam



[a] 3. Def. hujus.

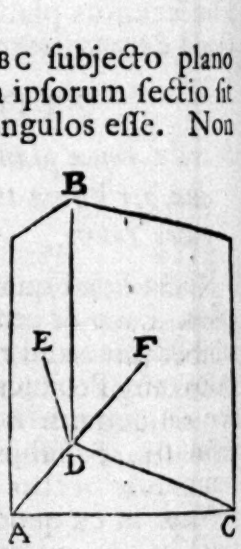
etiam ad CE eſt perpendicularis. angulus igitur ABF rectus
b 28. primi. eſt: ſed & GFB eſt rectus. ergo AB parallela *b* eſt ipſi FG,
eſt autem AB ſubjecto plano ad rectos angulos, & FG igitur eidem plano ad rectos
c 8. hujus. angulos *c* erit. at planum ad planum rectum eſt, quando communi planorum ſectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in uno
d 4. Def. hujus. planorum, reliquo plano ad rectos angulos *d* ſunt: communi vero planorum ſectioni CE in uno plano DE ad rectos angulos ducta FG, oſtenſa eſt ſubjecto plano ad rectos eſſe angulos. ergo planum DE rectum eſt ad ſubjectum planum. ſimiliter demonſtrabuntur & omnia quæ per AB tranſeunt plana ſubjecto plano recta eſſe. Si igitur recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipſam tranſeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt. Quod oportebat demonſtrare.



PROP. XIX. THEOR.

Si duo plana ſe invicem ſecantia plano alicui ſint ad rectos angulos; & communis ipſorum ſectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo plana ſe invicem ſecantia AB BC ſubjecto plano ſint ad rectos angulos: communis autem ipſorum ſectio ſit BD. Dico BD ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe. Non enim, ſed ſi fieri poteſt; non ſit BD ad rectos angulos ſubjecto plano; & à puncto D ducatur in plano quidem AB, rectæ lineæ AD ad rectos angulos ipſa DE: in plano autem BC ducatur ipſi CD ad rectos angulos DF. Et quoniam planum AB ad ſubjectum planum rectum eſt, & communi ipſorum ſectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta eſt
a 4. Def. hujus. DE, erit *a* DE ad ſubjectum planum perpendicularis. ſimiliter oſtendemus & DF perpendicularem eſſe ad ſubjectum planum. quare ab eodem puncto D ſubjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos conſtitutæ
b 13. hujus. ſunt ex eadem parte, quod fieri non *b* poteſt. non igitur ſubjecto plano à puncto D ad rectos angulos conſtituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipſam DB, communem planorum



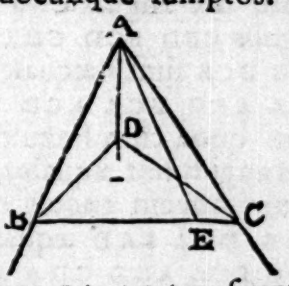
AB BC

AB BC ſectionem. quare DB ſubjecto plano eſt perpendicularis. Ergo ſi duo plana ſe invicem ſecantia plano alicui ſint ad rectos angulos; & communis ipſorum ſectio eidem plano ad rectos angulos erit. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XX. THEOR.

Si ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores ſunt, quomodocunque ſumpti.

Solidus angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. Dico angulorum BAC CAD DAB duos quoſlibet reliquo majores eſſe, quomodocunque ſumptos. Si enim BAC CAD DAB anguli inter ſe æquales ſint, perſpicuum eſt duos quoſlibet reliquo majores eſſe, quomodocunque ſumptos. ſin minus, ſit major BAC. & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipſa A, conſtituatur [a] angulo DAB, in plano per BA AC tranſeunte, æqualis angulus BAE; ponaturque ipſi AD æqualis AE; & per E ducta BEC ſecet rectas lineas AB AC in punctis BC, & DB DC jungantur. itaque quoniam DA eſt æqualis AE, communis autem AB, duæ DA AB æquales ſunt duabus AE AB; & angulus DAB æqualis eſt angulo BAE. baſis igitur DB baſi BE eſt [b] æqualis. & quoniam duæ DB DC ipſa BC majores ſunt [c], quarum DB æqualis oſtenſa eſt ipſi BE; erit reliqua DC quam reliqua EC major. quòd cum DA ſit æqualis AE, communis autem AC & baſis DC major baſi EC; erit [d] angulus DAC angulo EAC major. ſed ex conſtructione eſt DAB angulus æqualis ipſi BAE. quare DAB DAC anguli, angulo BAC majores ſunt. ſimiliter demonſtrabimus, & ſi duo quilibet alii ſumantur, eos reliquo eſſe majores. Si igitur ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur; duo quilibet reliquo majores ſunt, quomodocunque ſumpti. Quod demonſtrare oportebat.



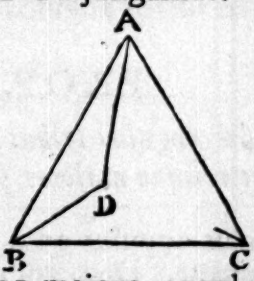
[a] 23. primi.
[b] 4. primi.
[c] 20. primi.
[d] 25. primi.

PROP. XXI. THEOR.

Omnis ſolidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit ſolidus angulus ad A, planis angulis BAC CAD DAB con-

contentus. Dico angulos BAC CAD DAB quatuor rectis esse minores. Sumantur enim in unaquaque ipsarum AB AC AD quævis puncta B C D, & BC CD DB jungantur. Quoniam igitur solidus angulus ad B, tribus angulis planis continetur CBA ABD CBD, duo quilibet reliquo majores [a] sunt: anguli igitur CBA ABD, angulo CBD sunt majores. eadem ratione, & anguli quidem BCA ACD majores sunt angulo BCD; anguli vero CDA ADB majores angulo CDB. quare sex anguli CBA ABD BCA ACD CDA ADB tribus angulis CBD BCD CDB sunt majores. sed tres anguli CBD BDC DCB sunt [b] æquales duobus rectis. sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD CDA ADB duobus rectis majores sunt. quod cum singulorum triangulorum ABC ACD ADB tres anguli sint æquales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli CBA ACB BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD æquales sex rectis. quorum sex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis sunt majores. reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores erunt. Quare omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Quod oportebat demonstrare.



[a] 20. hujus.

[b] 32. primi.

PROP. XXII. THEOR.

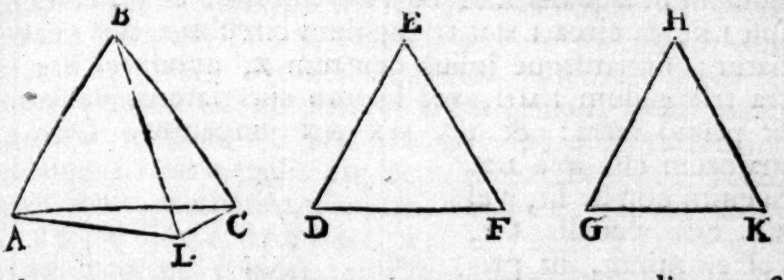
Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, ut ex iis quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti: contineant autem ipsos æquales rectæ lineæ AB BC, DE EF, GH HK, & AC DF GK jungantur. Dico fieri posse ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur: hoc est duas reliqua majores esse quomodocunque sumptas. Si igitur anguli ad B E H sint æquales, & AC DF GK æquales [a] erunt, & duæ reliqua majores. sin minus, sint inæquales anguli ad B E H, & major sit angulus ad B utrovis ipsorum qui sunt ad E H. major igitur est & [b] recta linea AC utravis ipsarum DF GK. & manifestum est ipsam AC unà cum altera ipsarum DF GK, reliqua esse majorem. Dico & DF GK ipsa AC majores

[a] 4 primi.

[b] 24. primi.

majores esse. constituatur [c] ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis angulus ABL, & uni [c] 23. primi.

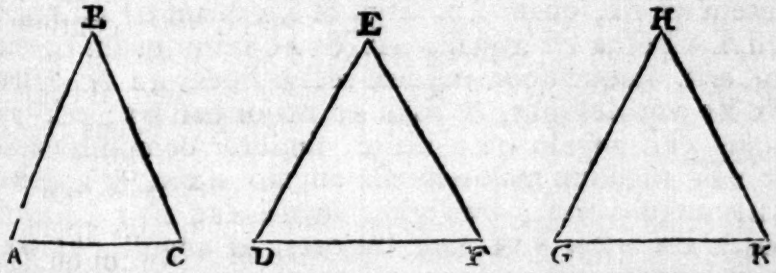


ipsarum AB BC, DE EF, GH HK ponatur æqualis BL, & AL CL jungantur. Quoniam igitur duæ AB BL duabus GH HK æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis AL basi GK æqualis. & quoniam anguli ad E H, angulo ABC majores sunt, quorum angulus GHK est æqualis ipsi ABL; erit reliquus qui ad E, angulo LBC major. quod cum duæ LB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri; & angulus DEF angulo LBC major; basis DF basi LC major [d] erit. ostensa est autem GK æqualis AL. [d] 24. primi. ergo DF GK ipsis AL LC sunt majores; sed AL LC majores [e] sunt ipsa AC. multo igitur DF GK, ipsa AC majores [e] 20. primi. erunt. Quare rectarum linearum AC DF GK duæ reliquæ majores sunt, quomodocunque sumptæ; ac propterea [f] fieri [f] 22. primi. potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIII. PROBL.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

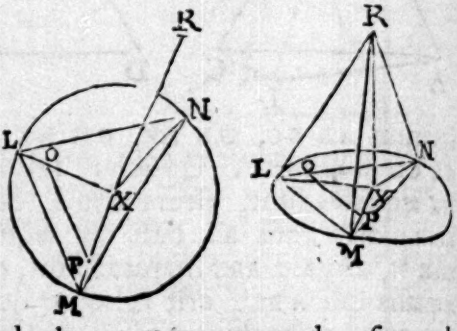
Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, sintque tres



anguli quatuor rectis minores. Oportet ex æqualibus ipsis ABC DEF GHK solidum angulum constituere. abscindantur æquales AB BC, DE EF, GH HK; & AC DF GK jungantur.

fieri

fieri igitur poteſt ut ex æqualibus ipſis AC DF GK conſti-
a 22. hujus. tuatur a triangulum. Itaque b conſtituatur LMN, ita ut AC
b 22. primi. quidem ſit æqualis LM, DF vero ipſi MN: & præterea GK
c 5. quarti. ipſi LN, & circa LMN triangulum circulus LMN c deſcribatur: ſumaturque ipſius centrum X, quod vel erit intra triangulum LMN, vel in uno ejus latere, vel extra, ſit primo intra: & LX MX NX jungantur. Dico AB majorem eſſe ipſa LX. Si enim non ita ſit, vel AB erit æqualis LX, vel ea minor. ſit primo æqualis. quoniam igitur AB eſt æqualis LX, atque eſt AB ipſi BC æqualis; erit LX æqualis BC, eſt autem LX æqualis XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales ſunt, altera alteri; & AC baſis baſi LM æqualis ponitur. quare



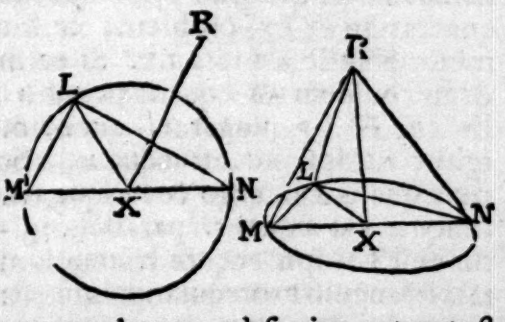
d 8. primi. d angulus ABC angulo LXM eſt æqualis: eadem ratione & angulus quidem DEF eſt æqualis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL æquales ſunt. ſed tres LXM MXN
e 2. Cor. 15. primi. NXL quatuor rectis ſunt e æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur quatuor rectis minores, quod eſt abſurdum. non igitur AB ipſi LX eſt æqualis. Dico præterea neque AB minorem eſſe ipſa LX. ſi enim fieri poteſt, ſit minor, & ponatur ipſi quidem AB æqualis XO, ipſi vero BC æqualis XP, & OP jungatur. quoniam igitur AB eſt æqualis BC, & XO ipſi XP æqualis erit. ergo & reliqua OL reliquæ PM eſt æqualis; ac propterea
f 2. ſexti. LM parallela f eſt ipſi OP; & LMX triangulum triangulo
g 4. ſexti. OPX æquiangulum. eſt g igitur ut XL ad LM, ita XO ad OP; & permutando ut XL ad XO, ita LM ad OP. major autem eſt LX, quam XO. ergo & LM quam OP eſt major. ſed LM poſita eſt æqualis AC. & AC igitur quam OP major erit. itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus
h 25. primi. OX XP æquales ſunt, & baſis AC major baſi OP; erit h angulus ABC angulo OXP major. ſimiliter demonſtrabimus & DEF angulum majorem eſſe angulo MXN, & angulum GHK angulo NXL; tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL ſunt majores. at anguli ABC DEF GHK quatuor rectis minores ponuntur. multo igitur anguli
i 2. Cor. 15. primi. LXM MXN NXL minores erunt quatuor rectis. ſed & i æquales. quod eſt abſurdum. non igitur AB minor eſt, quam

LX.

LX. oſtenſum autem eſt neque eſſe æqualem. ergo major ſit neceſſe eſt. conſtituatur [k] à puncto X circuli LMN plano ad rectos angulos XR. & exceſſui quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, ponatur æquale quadratum quod fit ex RX, & RL RM RN jungantur. quoniam igitur RX perpendicularis eſt ad planum DMN circuli, & ad unamquamque ipſarum LX MX NX erit [l] perpendicularis. & quoniam LX eſt æqualis XM, communis autem & ad rectos angulos XR, erit baſis LR æqualis [m] baſi RM. eadem ratione & RN utrique ipſarum RL RM eſt æqualis. tres igitur rectæ lineæ RL RM RN inter ſe æquales ſunt. & quoniam quadratum XR ponitur æquale exceſſui, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB quadratis ex LX XR æquale. quadratis autem ex LX XR æquale eſt [n] quadratum ex RL; rectus enim angulus eſt LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL æquale erit; ideoque AB ipſi RL eſt æqualis. ſed ipſi quidem AB æqualis eſt unaquæque ipſarum BC DE EF GH HK: ipſi vero RL æqualis utraque ipſarum RM RN. unaquæque igitur ipſarum AB BC DE EF GH HK unicuique ipſarum RL RM RN eſt æqualis. quod cum duæ RL RM duabus AB BC æquales ſint, & baſis LM ponatur æqualis baſi AC: erit [o] angulus LRM æqualis angulo ABC. eadem ratione & angulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem LRN angulo GHK eſt æqualis. Ex tribus igitur angulis planis LRM MRN LRN, qui æquales ſunt tribus datis ABC DEF GHK ſolidus angulus conſtitutus eſt ad R.

[k] 12. hujus.
[l] 3. Def. hujus.
[m] 4. primi.
[n] 47. primi.
[o] 8. primi.

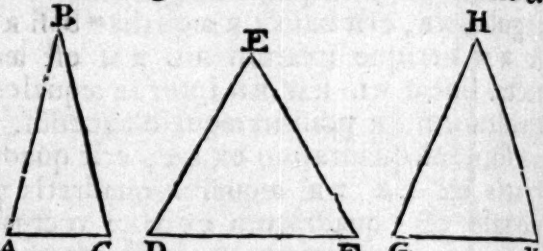
Sed ſit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in MN, quod ſit X, & XL jungatur. Dico rurſus AB majorem eſſe ipſa LX. Si enim non ita ſit, vel AB eſt æqualis LX vel ipſa minor. ſit primo æqualis. duæ igitur AB BC, hoc eſt DE EF duabus MX XL, hoc eſt ipſi MN æquales ſunt. ſed MN ponitur æqualis DF. ergo DE EF ipſi DF ſunt æquales. quod fieri non [p] poteſt non igitur AB eſt æqualis LX. ſimiliter neque minor. multo enim majus id, quod fieri non poteſt, ſequeretur. ergo AB ipſa LX major eſt. & ſimiliter ſi exceſſui quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX æquale ponatur quadratum

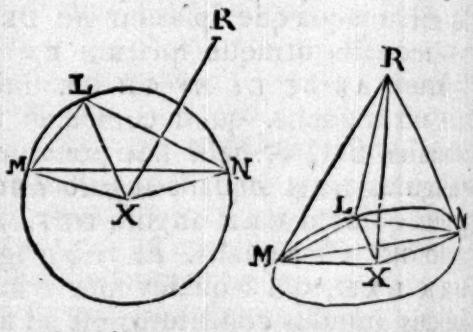


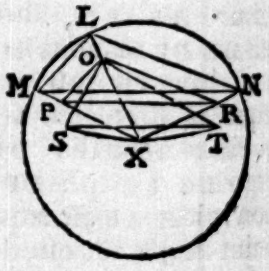
[p] 20. primi.

ex RX, & ipſa RX circuli plano ad rectos angulos conſtituatur, fiet problema.

Sed ſit centrum circuli extra triangulum LMN, quod ſit X, & LX MX NX jungantur. Dico & ſic AB ipſa LX majorem eſſe. Si enim non ita ſit, vel æqualis eſt, vel minor. ſit primo æqualis. ergo duæ AB BC duabus MX XL æquales ſunt, altera alteri; & baſis AC eſt æqualis baſi ML, angulus igitur ABC æqualis eſt angulo MXL. eadem ratione & GHK angulus ipſi LXN eſt æqualis; ac propterea totus MXN æqualis duobus ABC GHK. ſed & anguli ABC GHK angulo DEF majores ſunt. & angulus igitur MXN ipſo DEF eſt major. at quoniam duæ DE EF duabus MX XN æquales ſunt, & baſis DF æqualis baſi MN, erit MXN angulus angulo DEF æqualis o. oſtenſus autem eſt major, quod eſt abſurdum. non igitur AB eſt æqualis LX: deinceps vero oſtendemus neque minorem eſſe. quare major neceſſario erit. & ſi rurſus circuli plano ad rectos angulos conſtituamus XR, & ipſam æqualem ponamus lateri quadrati ejus, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, problema conſtituetur. Dico vero neque minorem eſſe AB ipſa LX. Si enim fieri poteſt, ſit minor; & ipſi quidem AB æqualis ponatur XO, ipſi vero BC æqualis XP, & OP jungatur. quoniam igitur AB ipſi BC eſt æqualis, erit OX æqualis XP. ergo & reliqua OL reliquæ PM æqualis. parallela igitur q eſt LM ipſi PO, & triangulum LMX triangulo PXO æquiangulum eſt: quare r ut XL ad LM, ita XO ad OP: & permutando ut LX ad XO ita LM ad OP. major autem eſt LX quam XO. ergo LM quam OP eſt major. ſed LM eſt æqualis AC. & AC igitur quam OP major erit







q 2. ſexti.

r 4. ſexti.

rit. itaque quoniam duæ AB BC duabus OX XP ſunt æquales altera alteri; & baſis AC major eſt baſi OP; erit ſ angulus ABC angulo OXP major. ſimiliter & ſi XR ſumatur æqualis utrivis ipſarum XO XP, & jungatur OR, oſtendemus angulum GHK angulo OXR majorem. conſtituatur ad rectam lineam LX, & punctum in ipſa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS, angulo autem GHK æqualis LXT, & ponatur utraque XS XT ipſi OX æqualis: junganturque OS OT ST. & quoniam duæ AB BC duabus OX XS æquales ſunt, & angulus ABC æqualis angulo OXS erit baſis AC, hoc eſt LM, baſi OS æqualis. eadem ratione, & LN eſt æqualis ipſi OT. quod cum duæ ML LN duabus OS OT ſint æquales, & angulus MLN major angulo SOT; erit t & baſis MN baſi ST major. ſed MN eſt æqualis DF. ergo & DF quam ST major erit. quoniam igitur duæ DE EF duabus SX XT æquales ſunt, & baſis DF major baſi ST; erit angulus DEF angulo SXT major ſ. æqualis autem eſt angulus SXT angulis ABC GHK. ergo DEF angulus angulis ABC GHK major eſt: ſed & minor. Quod fieri non poteſt. Quod demonſtrare oportebat.

ſ 25. primi.

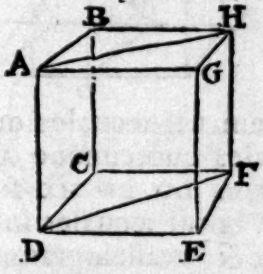
t 24. primi.

PROP. XXIV. THEOR.

Si ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana, & æqualia, & parallelogramma erunt.

Solidum enim CDGH parallelis planis AC GF BG CE FB AE contineatur. Dico oppoſita ejus plana, & æqualia, & parallelogramma eſſe. Quoniam enim duo plana parallela BG CE, à plano AC ſecantur, communes ipſorum ſectiones a parallelæ ſunt: ergo AB ipſi CD eſt parallela. rurſus quoniam duo plana parallela BF AE ſecantur à plano AC, communes ipſorum ſectiones parallelæ a ſunt: parallela igitur eſt AD ipſi BC. oſtenſa autem eſt & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit. ſimiliter demonſtrabimus, & unumquodque ipſorum CE FG GB BF AE parallelogrammum eſſe. jungantur AH DF. & quoniam parallela eſt AB quidem ipſi DC; BH vero ipſi CF, erunt AB BH ſeſe tangentes, duabus DC CF ſeſe tangentibus parallelæ, & non in eodem plano: quare æquales b angulos continebunt. angulus igitur ABH angulo DCF eſt æqualis. Et quoniam duæ AB BH duabus DC CF æquales c ſunt, &

a 16. hujus.



b 10. hujus.

c 34. primi.

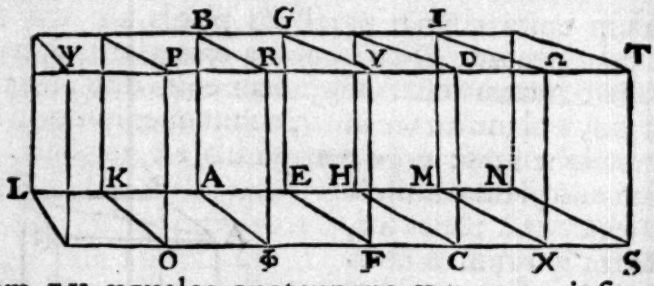
d 4. primi. angulus ABG æqualis angulo DCF, erit d baſis AH baſi DF æqualis: & ABH triangulum æquale triangulo DCF. quod e 34. primi. cum ipſius quidem ABH trianguli duplum e ſit BG parallelogrammum: ipſius vero DCF trianguli duplum parallelogrammum CE: erit BG parallelogrammum æquale parallelogrammo CE. ſimiliter demonſtrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF, & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale eſſe. Si igitur ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana, & æqualia, & parallelogramma ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

Cor. Ex jam demonſtratis conſtat, ſi ſolidum parallelis contineatur planis, oppoſita ipſius plana, & æqualia eſſe, & ſimilia, quippe quæ & ſingulos angulos æquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

PROP. XXV. THEOR.

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit ut baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

Solidum enim parallelepipedum ABCD plano YE ſecetur, oppoſitis planis RA DH parallelo. Dico ut EFΦA baſis ad baſim EHCF, ita eſſe ABFY ſolidum ad ſolidum EGCD. Producatur enim AH ex utraque parte: & ponantur ipſi



quidem EH æquales quotcunque HM MN; ipſi vero AE æquales quotcunque AK KL, & compleantur parallelogramma LO KΦ HX MS, & ſolida LP KR HΩ MT. quoniam igitur æquales inter ſe ſunt LK KA AE rectæ lineæ; a 36. primi. erunt & parallelogramma LO KΦ AF inter ſe a æqualia: itemque æqualia inter ſe parallelogramma KΞ KB AG, & adhuc b 24. hujus. parallelogramma LΨ KP AR inter ſe b æqualia; oppoſita enim ſunt. eadem ratione & parallelogramma EC HX MS æqualia inter ſe ſunt; itemque parallelogramma HG HI IN inter ſe æqualia: & inſuper parallelogramma DH MΩ NT. tria igitur plana ſolidi LP æqualia ſunt tribus planis ſolidi c 29. primi. KR, atque etiam ſolidi AY, c ſimilia quoque ſunt: ſed tria

tribus

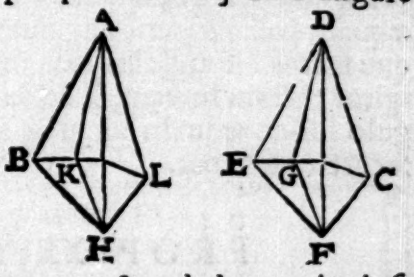
tribus oppoſitis [d] ſunt ſimilia & æqualia. ergo tria ſolida LP KR AY inter ſe æqualia [e] erunt. eadem ratione & tria ſolida ED HΩ MT ſunt æqualia inter ſe. quotuplex igitur eſt baſis LF ipſius AF baſis, totuplex eſt & LY ſolidum ſolidi AY. eadem ratione quotuplex eſt NF baſis ipſius baſis HF, totuplex eſt & ſolidum NY ipſius ED ſolidi: & ſi baſis LF eſt æqualis baſi NF, & ſolidum LY ſolido NY æquale erit; & ſi baſis LF ſuperat NF baſim, & LY ſolidum NY ſuperabit; & ſi minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus exiſtentibus, duabus ſcilicet baſibus AF FH, & duobus ſolidis AY ED; ſumpta ſunt æque multiplicia, baſis quidem AF, & AY ſolidi, videlicet baſis LF, & ſolidum LY: baſis vero HF, & ED ſolidi, nempe baſis NF, & ſolidum NY. & demonſtratum eſt ſi baſis LF ſuperat baſim NF, & LY ſolidum ſolidum NY ſuperare; & ſi æqualis æquale; & ſi minor minus. eſt igitur [f] ut AF baſis ad baſim FH, ita AY ſolidum ad ſolidum ED. Quare ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, oppoſitis planis parallelo; erit ut baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Quod oportebat demonſtrare.

[d] Cor. antecedent.
[e] 10. Def. hujus.
[f] 5. Def. quinti.

PROP. XXVI. PROBL.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipſa punctum dato angulo ſolido æqualem ſolidum angulum conſtituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipſa punctum A, & datus ſolidus angulus ad D qui EDC EDF FDC angulis planis continetur. Oportet ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ipſa punctum A, dato angulo ſolido ad D æqualem ſolidum angulum conſtituere. Sumatur in linea DF quodvis punctum F, à quo ad planum per ED DC tranſiens ducatur [a] perpendicularis FG, & plano in puncto G occurrat; jungaturque DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipſa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus [b] conſtituatur BAL; angulo autem EDG conſtituatur æqualis BAK. deinde ipſi DG ponatur æqualis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos [c] erigatur HK; ponaturque ipſi GF æqualis KH, & HA jungatur. Dico angulum ſolidum ad A qui angulis BAL BAH HAL, continetur, æqualem eſſe ſolido angulo ad D, angulis EDC EDF FDC contento. Sumantur



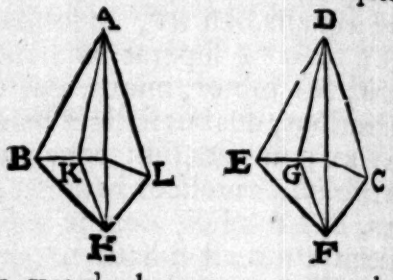
[a] 11. hujus.
[b] 23. primi.
[c] 12. hujus.

mantur enim æquales rectæ lineæ AB DE, & jungantur HB KB FE GE. quoniam igitur FG perpendicularis eſt ad ſubjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt, ſuntque in ſubjecto plano, rectos faciet [d] angulos, uterque igitur angulorum FGD FGE rectus eſt. eadem ratione, & uterque ipſorum HKA HKB eſt rectus. & quoniam duæ KA AB duabus GD DE æquales ſunt altera alteri, & angulos æquales continent; erit [e] baſis BK baſi EG æqualis. eſt autem & KH æqualis GF, atque angulos rectos continent. æqualis [e] igitur erit HB ipſi FE. rurſus quoniam duæ AK KH duabus DG GF æquales ſunt, & rectos continent angulos; erit baſis AH baſi DF æqualis: eſtque AB æqualis DE. duæ igitur HA AB duabus FD DE ſunt æquales; & baſis HB eſt æqualis baſi FE, ergo angulus [f] BAH angulo EDF æqualis erit. eadem ratione, & angulus HAL angulo FDC eſt æqualis, quandoquidem ſi aſſumamus æquales AL DC, & jungamus KL HL GC FC, quoniam totus BAL eſt æqualis toti EDC, quorum BAK ipſi EDG ponitur æqualis; erit reliquus KAL æqualis reliquo GDC. & quoniam duæ KA AL duabus GD DC æquales ſunt, & angulos æquales continent; baſis KL baſi GC [e] æqualis erit. eſt autem & KH æqualis GF, duæ igitur LK KH, duabus CG GF ſunt æquales; anguloſque rectos continent: ergo baſis HL æqualis eſt baſi CF. rurſus quoniam duæ HA AL, duabus FD DC æquales ſunt, & baſis HL æqualis baſi FC; erit angulus HAL [f] æqualis angulo FDC. atque factus eſt angulus BAL angulo EDC æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipſa punctum, dato angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtitutus eſt. Quod facere oportebat.

[d] 3. Def. hujus.

[e] 4. primi.

[f] 8. primi.



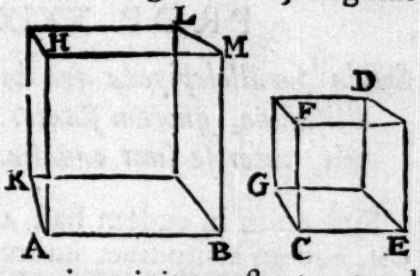
PROP. XXVII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

Sit recta quidem linea AB; datum vero ſolidum parallelepipedum CD. Oportet ad datam rectam lineam AB dato ſolido parallelepipedo CD ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere. Conſtituatur ad rectam lineam

neam AB, & ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqualis [a] angulus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita ut angulus quidem BAH æqualis sit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus HAK angulo GCF, & fiat [b] ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex æquali ut EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL solidum. quoniam igitur est ut EC ad CG, ita BA ad AK, nempe, circa æquales angulos ECG BAK latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile. eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt: sed tria tribus oppositis sunt [c] æqualia, & similia. ergo totum AL solidum toti solido CD simile erit. Ad datam igitur rectam lineam AB dato solilo parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum AL descriptum est. Quod facere oportebat.

[a] 26. hujus.



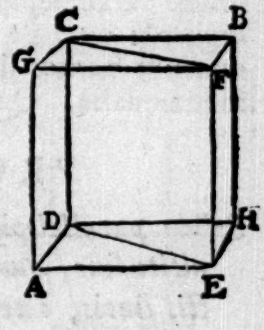
[b] 12. sexti.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorum planorum, videlicet CF DE. Dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari. Quoniam enim æquale [a] est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale [b], oppositum enim est; & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo CH; erit prisma contentum duobus triangulis CGF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH & BE CE: etenim planis, & numero & magnitudine æqualibus continentur. Ergo totum AB solidum

[a] 34. primi.



[b] 24. hujus.

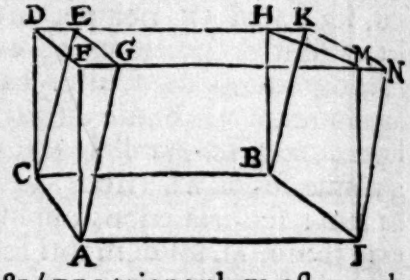
[c] Cor. 24. hujus.

dum à plano CDEF bifariam ſecatur. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes lineæ ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia.

Sint enim in eadem baſi AB ſolida parallelepipeda CM CN, eadem altitudine, quorum ſtantes AF AG LM LN CD CE BH BK ſint in eiſdem rectis lineis FN DK. Dico ſolidum CM ſolido CN æquale eſſe. Quoniam enim parallelogrammum eſt utrumque ipſorum CH CK; erit CB, utrique ipſarum DH EK [a] æqualis, ergo & DH eſt æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æqualis eſt reliquæ HK. quare & [b] DEC triangulum eſt æquale triangulo HKB. parallelogrammum autem DG eſt æquale parallelogrammo HN. eadem ratione & AFG triangulum æquale eſt triangulo LMN. eſt autem parallelogrammum CF parallelogrammo [c] BM, & parallelogrammum CG parallelogrammo BN æquale: oppoſita enim ſunt. ergo & priſma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC eſt æquale priſmati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur ſolidum, cujus baſis quidem parallelogrammum AB, oppoſitum autem ipſi GEHM. ergo totum CM ſolidum parallelepipedum toti ſolido parallelepipedo CN eſt æquale. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes lineæ ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 34. primi.

[b] 8. primi.

[c] 24. hujus.

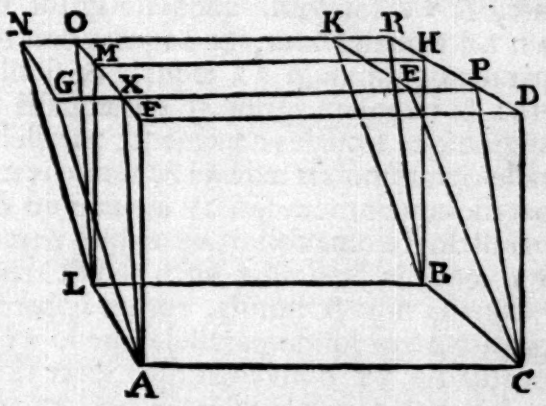
PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes lineæ non ſunt in iiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia.

Sint in eadem baſi AB ſolida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum ſtantes AF AG LM LN CD CE

BH

BH BK non ſint in eiſdem rectis lineis. Dico ſolidum CM ſolido CN æquale eſſe. Producantur enim NK DH, & GE FM, conveniantque inter ſe punctis R X; & adhuc producantur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR jungantur. ſolidum CM, cujus baſis quidem ACBL parallelogrammum, oppoſitum autem ipſi FDHM eſt



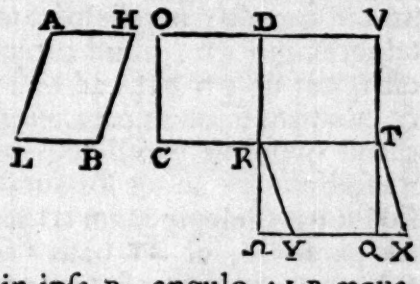
æquale ſolido CO, cujus baſis parallelogrammum ACBL & ei oppoſitum XPRO, in eadem enim ſunt baſi ACBL, & ipſorum ſtantes AF AX LM LO CD CP BH BR ſunt in eiſdem rectis lineis FO DR. ſed ſolidum CO, cujus baſis quidem parallelogrammum ACBL, oppoſitum autem ipſi XPRO eſt æquale ſolido CN, cujus baſis ACBL parallelogrammum, & ipſi oppoſitum GEKN. etenim in eadem ſunt baſi ACBL, & eorum ſtantes AG AX CE CP LN LO BK BR ſunt in eiſdem rectis lineis GP NR. quare & CM ſolidum ſolido CN æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes lineæ non ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat.

[a] 29. hujus.

PROP. XXXI. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in æqualibus ſunt baſibus, & eadem altitudine, inter ſe ſunt æqualia.

Sint in æqualibus baſibus AB CD ſolida parallelepipeda AE CF, & eadem altitudine. Dico ſolidum AE ſolido CF æquale eſſe. Sint primo ſtantes HK BE AG LM OP DF CR RS ad rectos angulos baſibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD ſit inæqualis, & producatur ipſi CR in directum RT: conſtituaturque ad rectam lineam RT, & ad punctum in ipſa R, angulo ALB æqualis angulus TRY. & ponatur ipſi quidem AL æqualis



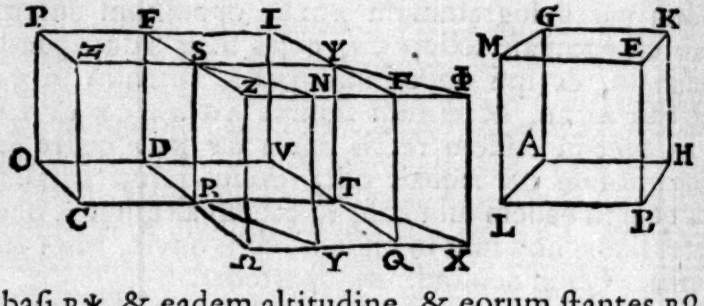
[a] 23. primi.

RT,

RT, ipſi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipſi RT parallela ducatur XY, compleaturque parallelogrammum RX, & ΨY ſolidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales ſunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum RX æquale & ſimile parallelogrammo HL: & quoniam rurſus AL eſt æqualis RT, & LM ipſi RS, anguloſque æquales continent, parallelogrammum RΨ parallelogrammo AM æquale & ſimile erit. eadem ratione LE parallelogrammum ipſi SY æquale eſt & ſimile. tria igitur parallelogramma ſolidi AE tribus parallelogrammis ſolidi ΨY æqualia & ſimilia ſunt. ſed & tria tribus oppoſita & æqualia ſunt & ſimilia. totum igitur AE ſolidum parallelepipedum toti ſolido parallelepipedo ΨY eſt æquale. producantur DR XY, conveniantque inter ſe in puncto Ω, & per T ipſi DΩ parallela ducatur TQ, & producantur TQ OD, & conveniant in V, compleaturque ſolida ΩΨ RI. ſolidum igitur ΨΩ cujus baſis eſt RΨ parallelogrammum, oppoſitum autem ipſi ΩΓ, eſt æquale ſolido ΨY, cujus baſis eſt RΨ parallelogrammum, & oppoſitum ipſi YΦ, in eadem enim

b Cor. 24. hujus.

c 29. hujus.



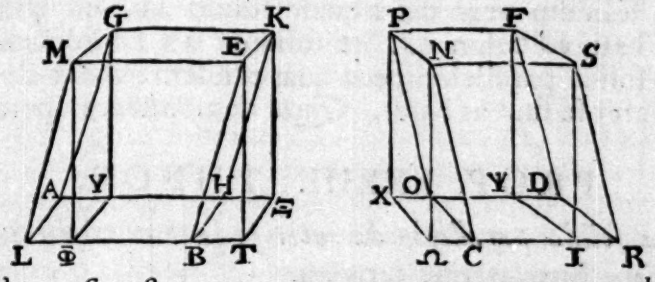
ſunt baſi RΨ, & eadem altitudine, & eorum ſtantes RΩ RY TQ TX SZ SN ΨΓ ΨΦ in eiſdem ſunt rectis lineis ΩX ZΦ. ſed ſolidum ΨY æquale eſt ſolido AE. ergo & ΨΩ ſolido AE eſt æquale. præterea quoniam parallelogrammum RYXT eſt æquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem eſt baſi RT, & in eiſdem parallelis RT ΩX. & parallelogrammum RYXT parallelogrammo CD eſt æquale, quoniam & ipſi AB eſt æquale; parallelogrammum ΩT æquale eſt parallelogrammo CD: aliud autem eſt parallelogrammum DT. eſt igitur ut CD baſis ad baſim DT, ita ΩT ad ipſam DT. & quoniam ſolidum parallelepipedum CI ſecatur plano RF planis oppoſitis parallelo; erit ut CD baſis ad baſim DT, ita ſolidum CF ad RI ſolidum. eadem ratione quoniam ſolidum parallelepipedum ΩI ſecatur plano RΨ oppoſitis planis parallelo, ut ΩT baſis ad baſim DT, ita erit ſolidum ΩΨ ad RI ſolidum. ſed ut CD baſis ad baſim DT, ita baſis ΩT ad ipſam TD. ut igitur ſolidum CF ad RI ſolidum ita

d

d 25. hujus.

ſolidum

ſolidum ΩΨ ad ſolidum RI. quod cum utrumque ſolidorum CF ΩΨ ad ſolidum RI eandem habet proportionem, ſolidum CF ſolido ΩΨ eſt æquale. ſolidum autem ΩΨ oſtenſum eſt æquale ſolido AE. ergo & [e] AE ipſi CF æquale erit. [e] 9. quinti.

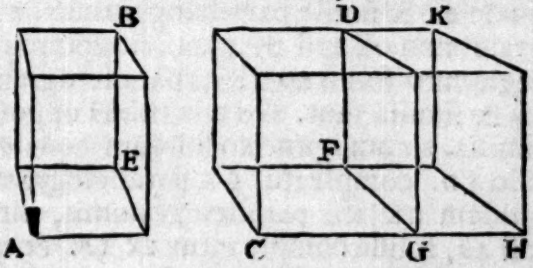


Sed non ſint ſtantes AG HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipſis AB CD baſibus. Dico rurſus ſolidum AE æquale eſſe ſolido CF. Ducantur [f] à punctis K E G M, P F N S ad ſubjectum planum perpendiculares KΞ ET GY MΦ, SI FΨ NΩ PX, & plano in punctis Ξ T Y Φ, Ψ X Ω I occurrant, & jungantur ΞT YΦ ΞY TΦ XΨ XΩ ΩI ΨI. æquale igitur eſt KΦ ſolidum ſolido PI; in æqualibus enim ſunt baſibus KM PS, & eandem altitudine, quorum ſtantes ad rectos angulos ſunt baſibus. ſed KΦ ſolidum ſolido AE eſt [g] æquale: ſolidum vero PI æquale [g] ſolido CF. ſi quidem in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis. ergo & ſolidum AE ſolido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in æqualibus ſunt baſibus & eadem altitudine, inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat. [f] 11. hujus. [g] 30. hujus.

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint ſolida parallelepipeda AB CD, quæ eandem altitudinem habeant. Dico inter ſe eſſe ut baſes; hoc eſt ut AE baſis ad baſim CF ita ſolidum AB ad CD ſolidum. applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE æquale FH, & à baſi FH eadem altitudine ipſi CD ſolidum parallelepipedum GK compleatur. ſolidum igitur AB ſolido GK eſt [a] æquale; in æqualibus enim



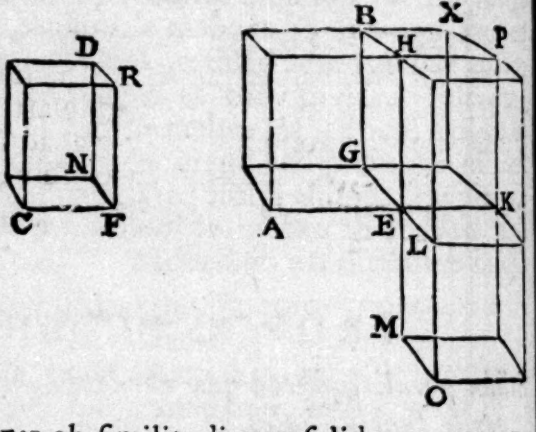
[a] 31. hujus.

enim ſunt baſibus AE FH, & eadem altitudine. itaque quoniam ſolidum parallelepipednm CK plano DG ſecatur oppoſitis
b 25. hujus. planis parallelo; erit ut b HF baſis ad baſim FC, ita ſolidum HD ad DC ſolidum; atque eſt baſis quidem FH baſi AE æqualis, ſolidum vero GK æquale ſolido AB. eſt igitur & ut AE baſis ad baſim CF, ita ſolidum AB ad ſolidum CD. Quare ſolida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

Similia ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt in triplicata proportione homologorum laterum.

Sint ſimilia ſolida parallelepipeda AB CD. latus autem AE homologum ſit lateri CF. Dico ſolidum AB ad CD ſolidum triplicatam proportionem habere ejus, quam habet AE ad CF. Producantur enim EK EL EM in directum ipſis AE GE HE: & ipſi quidem CF æqualis ponatur EK, ipſi vero FN æqualis EL; & adhuc ipſi FR æqualis EM, & KL parallelogrammum, & KO ſolidum compleantur. quoniam igitur duæ KE EL duabus CF FN æquales ſunt: ſed & angulus KEL angulo CFN eſt æqualis; quia & angulus AEG ipſi CFN ob ſimilitudinem ſolidorum AB CD: erit & KL parallelogrammum ſimile & æquale parallelogrammo CN. eadem ratione, & parallelogrammum KM æquale eſt & ſimile parallelogrammo CR, & adhuc parallelogrammum OE ipſi DF parallelogrammo. tria igitur parallelogramma ſolidi KO tribus parallelogrammis CD ſolidi æqua-



a Cor. 24. hujus. lia & ſimilia ſunt. ſed tria tribus oppoſitis æqualia a ſunt & ſimilia. totum igitur KO ſolidum æquale eſt & ſimile toti ſolido CD. compleatur GK parallelogrammum; & à baſibus quidem GK KL parallelogrammis, altitudine vero eadem ipſi AB, ſolida compleantur EX LP. & quoniam ob ſimilitudinem ſolidorum AB CD eſt ut AE ad CF, ita EG ad FN; & EH ad FR; æqualis autem FC ipſi EK, & FN ipſi EL, &

FR

FR ipſi EM. erit ut AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM. ſed ut AE quidem ad EK, [b] ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK: ut autem GE ad EL, ita GK ad KL: & ut [b] HE ad EM, ita PE ad KM. & ut igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, & PE ad KM. ſed ut AG quidem ad GK, ita [c] AB ſolidum ad ſolidum EX: ut autem GK ad KL, ita ſolidum EX ad PL ſolidum: & ut PE ad KM, ita PL ſolidum ad ſolidum KO. & ut igitur ſolidum AB ad ſolidum EX, ita [d] EX ad PL, & PL ad KO. ſi autem quatuor ſint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad ſecundam. ergo & AB ſolidum ad ſolidum KO triplicatam habet proportionem ejus, quam AB ad EX. ſed ut AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; & AE recta linea ad ipſam EK. quare & AB ſolidum ad ſolidum KO triplicatam proportionem habebit ejus, quam AE habet ad EK. æquale autem eſt ſolidum KO ſolido CD, & recta linea EK rectæ CF eſt æqualis. Ergo & AB ſolidum ad ſolidum CD triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipſius homologum AE habet ad CF homologum latus. Quod demonſtrare oportebat.

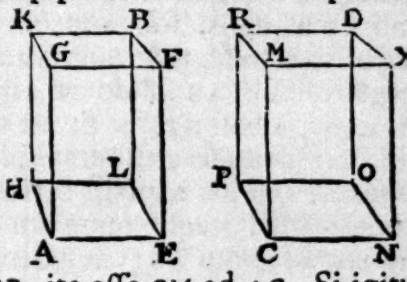
[b] 1. ſexti.
[c] 32. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 11. Def. quinti.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita eſſe ſolidum parallelepipedum quod fit à prima ad ſolidum quod à ſecunda, ſimile, & ſimiliter deſcriptum; quoniam & prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad ſecundam.

PROP. XXXIV. THEOR.

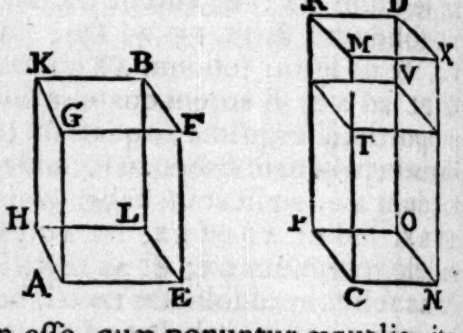
Æqualium ſolidorum parallelepipedorum reciprocantur baſes & altitudines; & quorum ſolidorum parallelepipedorum reciprocantur baſes & altitudines, ea inter ſe ſunt æqualia.

Sint æqualia ſolida parallelepipeda AB CD. Dico ipſorum baſes & altitudines reciprocari, hoc eſt ut EH baſis ad baſim NP, ita eſſe altitudinem ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. Sint enim primo ſtantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos angulos baſibus ipſorum.



Dico ut EH baſis ad baſim NP, ita eſſe CM ad AG. Si igitur baſis

baſis EH baſi NP ſit æqualis, eſt autem & AB ſolidum æquale ſolido CD; erit & CM æqualis ipſi AG. ſi [d] enim baſibus EH NP æqualibus exiſtentibus non ſint AG CM altitudines æquales, neque AB ſolidum ſolido CD æquale erit. ponitur autem æquale. non igitur inæqualis eſt altitudo CM altitudini AG. ergo æqualis ſit neceſſe eſt; ac propterea ut EH baſis ad baſim NP, ita erit CM ad AG. At vero non ſit baſis EH æqualis baſi NP. ſed EH ſit major. eſt autem & AB ſolidum ſolido C D æquale. ergo major eſt CM ipſa AG; alioqui rurſus ſequeretur ſolida AB CD æqualia non eſſe, quæ ponuntur æqualia. itaque ponatur CT æqualis ipſi AG: & à baſi quidem NP, altitudine autem CT ſolidum parallelepipedum VC compleatur. quoniam igitur ſolidum AB ſolido CD eſt æquale, aliud autem aliquod eſt VC, & æqualia [a] ad idem eandem habent proportionem; erit ut AB ſolidum ad ſolidum CV, ita CD ſolidum ad ſolidum CV. ſed ut AB ſolidum ad ſolidum CV, ita [b] baſis EH ad NP baſim; æque alta enim ſunt AB CV ſolida. ut autem ſolidum CD ad ipſum CV, ita [c] MP baſis ad baſim PT, & MC [d] ad CT. & igitur ut baſis EH ad NP baſim, ita MC ad CT. eſt autem CT æqualis AG. ergo & ut EH baſis ad baſim NP, ita MC ad AG. quare ſolidorum parallelepipedorum AB CD baſes & altitudines reciprocantur. Rurſus ſolidorum parallelepipedorum AB CD baſes & altitudines reciprocentur: ſitque ut EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi CD altitudo ad altitudinem ſolidi AB. Dico ſolidum AB ſolido CD æquale eſſe. ſint enim rurſus ſtantes ad rectos angulos baſibus. & ſi quidem baſis EH ſit æqualis baſi NP, eſtque ut EH baſis ad baſim NP, ita altitudo ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem: erit ſolidi CD altitudo altitudini ſolidi AB æqualis. ſolida autem parallelepipeda, quæ ſunt in æqualibus baſibus & eadem altitudine inter ſe [e] æqualia ſunt ergo ſolidum AB ſolido CD eſt æquale. Sed non ſit EH baſis æqualis baſi NP, & ſit EH major. major igitur eſt & ſolidi CD altitudo altitudine ſolidi AB, hoc eſt CM ipſa AG. ponatur ipſi AG æqualis rurſus CT, & ſimiliter ſolidum CV compleatur. itaque quoniam eſt ut EH baſis ad baſim NP, ita MC ad ipſam AG; æqualis autem eſt AG ipſi CT: erit ut baſis EH ad NP baſim, ita MC ad CT. ſed ut baſis EH ad

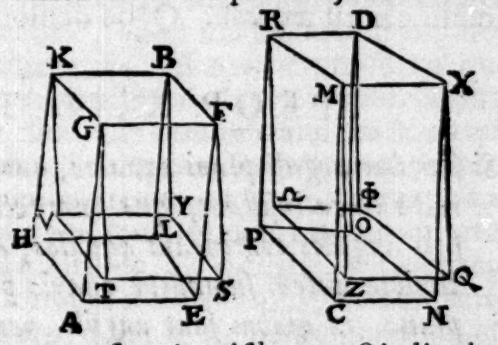


a 7. quinti.
b 32. hujus.
c 25. hujus.
d 1. ſexti.
e 31. hujus.

NP

NP baſim, ita AB ſolidum ad ſolidum CV; æque alta enim ſunt ſolida AB CV. ut autem MC ad CT, ita & MP baſis ad baſim PT, & ſolidum CD ad CV ſolidum. & igitur ut ſolidum AB ad ſolidum CV, ita CD ſolidum ad ſolidum CV. quòd cum utrumque ſolidorum AB CD ad ipſum CV eandem proportionem habeat; erit AB ſolidum ſolido CD æquale. Quod demonſtrare oportebat.

Non ſint autem ſtantes FE BL GA KH, XN DO MC RP ad rectos angulos baſibus ipſorum: & à punctis F G B K, I M D R ad plana baſium EH NP ducantur perpendiculares, quæ planis in punctis S T Y V, Q Z Ω Φ occurrant & compleantur ſolida FV XΩ. Dico & ſic æqualibus exiſtentibus ſolidis AB CD, baſes & altitudines reciprocari, ſcil. ut EH baſis ad baſim NP, ita eſſe altitudinem ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. quoniam enim ſolidum AB ſolido CD eſt æquale; ſolido autem AB æquale eſt *f* ſolidum BT; ineadem namque ſunt baſi FK, & eadem altitudine; quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis: & ſolidum DC eſt *f* æquale ſolido DZ, quòd in eadem ſint baſi XR, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis; erit & ſolidum BT ſolido DZ æquale. æqualium autem ſolidorum parallelepipedorum, quorum altitudines baſibus ipſorum ſunt ad rectos angulos, baſes *g* & altitudines reciprocantur. eſt igitur ut FK baſis ad baſim XR, ita ſolidi DZ altitudo ad altitudinem ſolidi BT. atque eſt baſis quidem FK baſi EH æqualis, baſis vero XR æqualis baſi NP. quare ut EH baſis ad baſim NP. ita eſt altitudo ſolidi DZ ad ſolidi BT altitudinem. eædem autem ſunt altitudines ſolidorum DZ DC, itemque ſolidorum BT BA. eſt igitur ut EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi DC altitudo ad altitudinem ſolidi AB. ergo ſolidorum parallelepipedorum AB CD baſes & altitudines reciprocantur. Rurſus ſolidorum parallelepipedorum AB CD baſes & altitudines reciprocentur, ſitque ut EH baſis ad baſim NP, ita altitudo ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. Dico ſolidum AB ſolido CD æquale eſſe. Iiſdem namque conſtructis, quoniam ut EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi CD altitudo ad altitudinem ſolidi AB; & baſis quidem EH eſt æqualis baſi FK; NP vero ipſi XR: erit ut FK baſis ad baſim XR, ita altitudo



f 30. hujus.

g Ex ante demonſtratis.

altitudo ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. eædem autem ſunt altitudines ſolidorum AB BT, & ipſorum CD DZ. eſt igitur ut FK baſis ad baſim XR, ita ſolidi DZ altitudo ad altitudinem ſolidi BT. quare ſolidorum BT DZ parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocantur, quorum autem ſolidorum parallelepipedorum altitudines ſunt ad rectos angulos baſibus ipſorum, & baſes & altitudines reciprocantur, ea inter ſe ſunt æqualia [h]. ergo BT ſolidum ſolido DZ eſt æquale. ſed ſolidum quidem BT æquale eſt ſolido BA [i], etenim in eadem ſunt baſi FK, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis: ſolidum vero DZ eſt æquale ſolido DC, ſi quidem in eadem ſunt baſi XR, & eadem altitudine, & non in eiſdem rectis lineis. ergo & ſolidum AB ſolido CD eſt æquale. Quod demonſtrare oportebat.

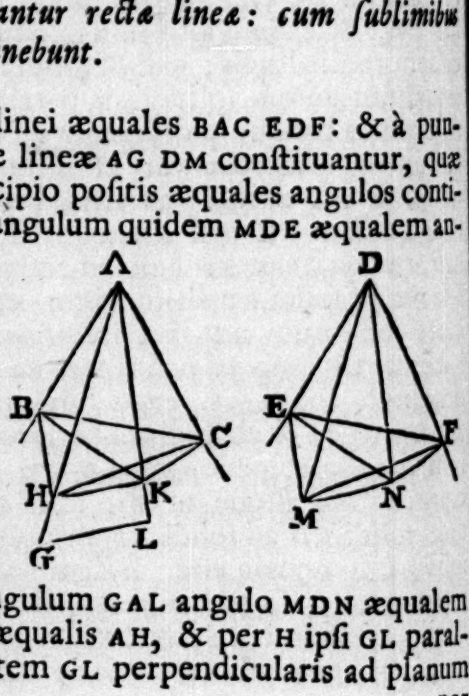
h Ex ante demonſtratis.

i 30. hujus.

PROP. XXXV. THEOR.

Si ſint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum rectis lineis à principio poſitis angulos contineant æquales, alterum alteri; in ſublimibus autem ſumantur quævis puncta, atque ab ipſis ad plana, in quibus ſunt anguli, perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum ſublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales BAC EDF: & à punctis A D ſublimes rectæ lineæ AG DM conſtituantur, quæ cum rectis lineis à principio poſitis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB, angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & ſumantur in ipſis AG DM quævis puncta G, M, à quibus ad plana per BAC EDF ducantur perpendiculares GL MN occurrentes planis in punctis L N; & LA ND jungantur. Dico angulum GAL angulo MDN æqualem eſſe. Ponatur ipſi DM æqualis AH, & per H ipſi GL parallela ducatur HK. eſt autem GL perpendicularis ad planum per



per BAC. ergo & HK ad [a] planum per BAC perpendicularis erit. ducantur à punctis K N ad rectas lineas AB AC DF DE perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE jungantur. Quoniam igitur quadratum ex HA æquale [b] eſt quadratis ex HK KA; quadrato autem ex KA æqualia [b] ſunt ex KC CA quadrata: erit quadratum ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC æquale eſt quadratum eſt HC. quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA æquale erit: & idcirco angulus HCA [c] eſt rectus. eadem ratione & angulus DFM rectus eſt. ergo angulus ACH ipſi DFM eſt æqualis. eſt autem & HAC angulus æqualis angulo MDF. duo igitur triangula ſunt MDF HAC duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur; videlicet HA ipſi DM. ergo & reliqua latera reliquis lateribus [d] æqualia habebunt, alterum alteri. quare AC eſt æqualis DF. ſimiliter demonſtrabimus & AB ipſi DE æquale eſſe. jungantur enim HB ME. & quoniam quadratum ex AH eſt æquale quadratis ex AK KH; quadrato autem ex AK æqualia ſunt quadrata ex AB BK: erunt quadrata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. ſed quadratis ex BK KH æquale eſt ex BH quadratum; rectus enim angulus eſt HKB, propterea quòd & HK perpendicularis eſt ad ſubjectum planum. quadratum igitur ex AH æquale eſt quadratis ex AB BH. quare angulus ABH [c] rectus eſt. eadem ratione & angulus DEM eſt rectus. eſt autem & BAH angulus æqualis angulo EDM, ita enim ponitur: atque eſt AH æqualis DM. ergo & AB ipſi DE [d] eſt æqualis. quoniam igitur AC quidem eſt æqualis DF, AB vero ipſi DE; erunt duæ CA AB duabus FD DE æquales. ſed & angulus BAC angulo FDE eſt æqualis. baſis [e] igitur BC baſi EF, & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis æquales ſunt. ergo angulus ACB angulo DFE eſt æqualis. eſt autem & rectus ACK æqualis recto DFN. quare & reliquus BCK reliquo EFN æqualis. eadem ratione, & CBK angulus eſt æqualis angulo FEN. itaque duo triangula ſunt BCK EFN, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod eſt ad æquales angulos, videlicet BC ipſi EF. ergo & [d] reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. æqualis igitur eſt CK ipſi FN. eſt autem & AC ipſi DF æqualis. quare duæ AC CK duabus DF FN æquales ſunt: & rectos continent angulos. baſis igitur AK eſt æqualis baſi DN. & cum AH ſit æqualis DM, erit & quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM æquale. ſed quadrato ex AH æqualia ſunt ex AK KH quadrata; [b] etenim

[a] 8. hujus.
[b] 47. primi.
[c] 48. primi.
[d] 26. primi.
[e] 4. primi.

nim rectus eſt angulus AKH. quadrato autem ex DM æqualia ſunt quadrata ex DN NM, quòd angulus DNM rectus ſit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM ſunt æqualia. quorum quadratum ex AK æquale eſt quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM eſt æquale. & ideo recta linea HK ipſi MN æqualis. quod cum duæ HA AK duabus MD DN æquales ſint, altera alteri, & baſis HK baſi NM oſtenſa ſit æqualis; angulus HAK angulo MDN æqualis *f* erit. Quod oportebat demonſtrare.

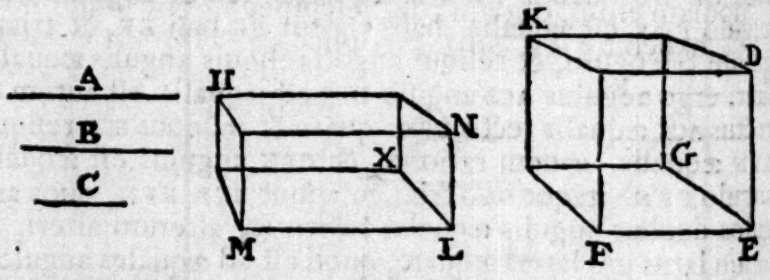
f 8. primi.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipſis autem conſtituantur ſublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio poſitis æquales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares, quæ ab ipſis ad plana, in quibus ſunt primi anguli, ducantur, inter ſe æquales eſſe.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales ſint, ſolidum parallelepipedum quod à tribus fit, æquale eſt ſolido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, ſit ſcil. ut A ad B ita B ad C. Dico ſolidum quod fit ex ipſis A B C, æquale eſſe ſolido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur ſolidus angulus ad E contentus tribus angulis planis DEG GEF FED; & ipſi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipſarum DE GE EF; & ſolidum



parallelepipedum EK compleatur: ipſi vero A ponatur æqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in ipſa L, conſtituatur *a* angulo ſolido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN; & ponatur ipſi quidem B æqualis LN, ipſi vero C æqualis LX. quoniam igitur eſt ut A ad B ita B ad C, æqualis autem eſt A ipſi LM, & B unicuique ipſarum LN EF EG ED, & C ipſi LX; erit ut LM ad EF

a 26. hujus.

ita

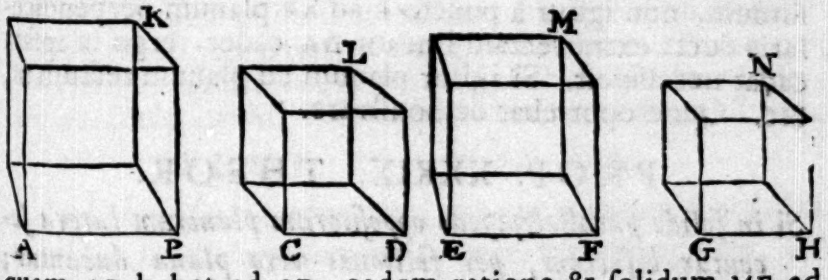
ita GE ad LX. & circum æquales angulos MLX GEF, latera ſunt reciproca. ergo MX parallelogrammum parallelogrammo GF eſt [b] æquale. & quoniam duo anguli plani rectilinei æquales ſunt GEF XLM, & in ipſis ſublimes rectæ lineæ conſtituuntur LN ED æquales inter ſe, & cum rectis lineis à principio poſitis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt [c] perpendiculares quæ à punctis N D ad plana per XLM GEF ducuntur, inter ſe æquales. ergo ſolida LH EK eadem ſunt altitudine. quæ vero in æqualibus baſibus ſunt ſolida parallelepipeda, & eadem altitudine, inter ſe [d] ſunt æqualia. ergo ſolidum HL æquale eſt ſolido EK. atque eſt ſolidum quidem HL quod fit à tribus A B C, ſolidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales ſint, ſolidum parallelepipedum quod fit à tribus, æquale eſt ſolido parallelepipedo quod fit, &c. Quod demonſtrare oportebat.

[b] 14. ſexti.
[c] Cor. 35. hujus.
[d] 31. hujus.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales ſint, & quæ ab ipſis fiunt ſolida parallelepipeda ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia erunt. Et ſi quæ ab ipſis fiunt ſolida parallelepipeda ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia ſint; & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, ſit ſcil. ut AB ad CD, ita EF ad GH, & deſcribantur ab ipſis AB CD EF GH ſimilia & ſimiliter poſita ſolida parallelepipeda KA LC ME NG. Dico ut KA ad LC, ita eſſe ME ad NG. Quoniam enim ſolidum parallelepipedum KA ſimile eſt ipſi LC, habebit [a] KA ad LC triplicatam proportionem ejus



quam AB habet ad CD. eadem ratione & ſolidum ME ad ipſum NG [a] triplicatam proportionem habebit ejus quam habet EF ad GH. atque eſt ut AB ad CD, ita EF ad GH. ut igitur AK ad LC, ita ME ad NG. Sed ſit ut ſolidum AK ad ſolidum LC, ita ME ſolidum ad ſolidum NG. Dico, ut

[a] 33. hujus.

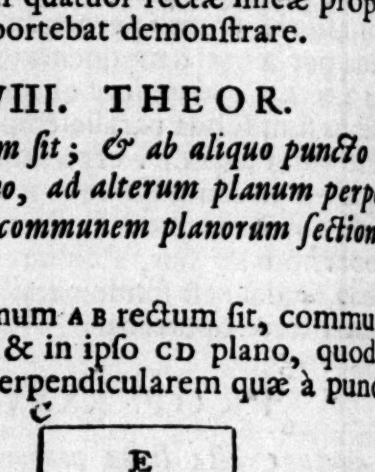
recta linea AB ad rectam CD, ita eſſe rectam EF ad ipſam GH. quoniam enim rurſus AK ad LC triplicatam [b] proportionem habet ejus quam AB habet ad CD; habet autem & ME ad NG triplicatam proportionem ejus quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales ſint, &c. Quod oportebat demonſtrare.

[b] 33. hujus.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si planum ad planum rectum ſit; & ab aliquo puncto eorum quæ ſunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum ſectionem cadet.

Planum nempe CD ad planum AB rectum ſit, communis autem eorum ſectio ſit AD, & in ipſo CD plano, quodvis punctum E ſumatur. Dico perpendicularem quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipſam AD. Non enim; ſed ſi fieri poteſt, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis [a] ducatur FG, quæ quidem & plano CD ad [b] rectos angulos erit; & EG jungatur. quoniam igitur FG plano CD eſt ad rectos angulos; contingit autem ipſam recta linea EG quæ eſt in eodem CD plano: erit angulus FGE [c] rectus. ſed & EF plano AB ad rectos angulos eſt: rectus igitur eſt angulus EFG. quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis ſunt æquales; quod eſt [d] abſurdum. non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipſam cadat neceſſe eſt. Si igitur planum ad planum rectum ſit, &c. Quod oportebat demonſtrare.



[a] 10. primi.
[b] 4. Def. hujus.
[c] 3. Def. hujus.
[d] 17. primi.

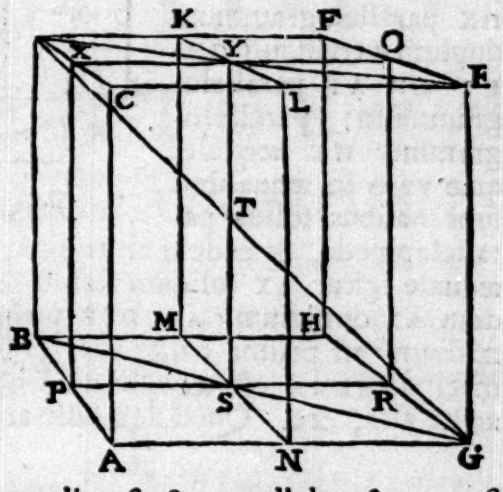
PROP. XXXIX. THEOR.

Si in ſolido parallelepipedo oppoſitorum planorum latera ſecentur bifariam, per ſectiones vero plana ducantur; communis planorum ſectio, & ſolidi parallelepipedi diameter, ſeſe bifariam ſecabunt.

In ſolido enim parallelepipedo AF, oppoſitorum planorum CF AH latera bifariam ſecentur in punctis KLMNXORP.

&

& per ſectiones plana ducantur KN XR; communis autem planorum ſectio ſit YS, & ſolidi parallelepipedi diameter ſit DG. Dico YS DG ſeſe bifariam ſecare, hoc eſt YT quidem ipſi TS, DT vero ipſi TG æqualem eſſe. Jungantur enim DY YE BS SG. quoniam igitur DX parallela eſt ipſi OE, alterni anguli DXY YOE inter ſe æquales [a] ſunt. & quoniam [a] 29.primi.



DX quidem eſt æqualis OE, XY vero ipſi YO, & angulos æquales continent; erit [b] baſis DY æqualis baſi YE. & triangulum DXY triangulo YOE, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, angulus igitur XYD eſt æqualis angulo OYE, & ob id [c] recta linea eſt DYE. eadem ratione, & BSG recta eſt, atque eſt BS æqualis SG. & [b] 4. primi. [c] 14.primi.

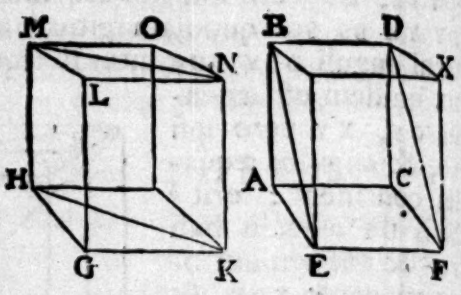
quoniam CA ipſi DB æqualis eſt & parallela, & CA eſt æqualis & parallela ipſi EG; erit & DB ipſi EG æqualis & parallela; & ipſas conjungunt rectæ lineæ DE GB: parallela igitur [d] eſt DE ipſi BG. & ſumpta ſunt in utraque ipſarum quævis puncta D Y G S, & junctæ ſunt DG YS. ergo DG YS in uno [e] ſunt plano. quod cum DE ſit parallela BG, [e] 7. hujus. erit & EDT angulus angulo BGT æqualis [f], alterni enim ſunt. eſt autem & DTY angulus æqualis [f] ipſi GTS. duo [f] 15.primi. igitur ſunt triangula DTY GTS duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur, videlicet DY ipſi GS: dimidia enim ſunt ipſorum DE BG. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. [g] quare DT [g] 26.primi. quidem eſt æqualis TG, YT vero ipſi TS. Si igitur in ſolido parallelepipedo, &c. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XL. THEOR.

Si ſint duo priſmata æque alta, quorum unum quidem baſim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, & parallelogrammum duplum ſit trianguli; ea inter ſe æqualia erunt.

Sint priſmata æquæ alta ABCDEF GHKLMN. & unum quidem baſim habeat parallelogrammum AF, alterum vero

GHK triangulum, & duplum ſit AF parallelogrammum trianguli GHK. Dico priſma ABCDEF priſmati GHKLMN æquale eſſe. Compleantur enim AX GO ſolida. & quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK eſt duplum; eſt autem & HK parallelogrammum duplum [a] trianguli GHK: erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. quæ vero in æqualibus ſunt baſibus ſolida parallelepipeda, & eadem altitudine, inter ſe æqualia [b] ſunt. æquale igitur AX ſolidum ſolido GO. atque eſt ſolidi quidem AX dimidium [c] ABCDEF priſma, ſolidi vero GO dimidium [c] eſt priſma GHKLMN. ergo ABCDEF priſma priſmati GHKLMN eſt æquale. Si igitur ſint duo priſmata æque alta, &c. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 41. primi.

[b] 31. hujus.

[c] 28. hujus.

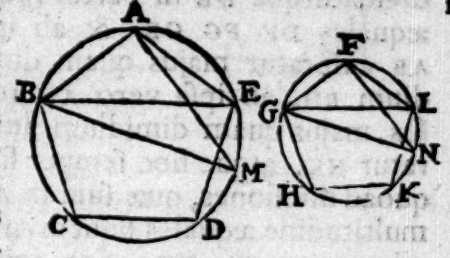
EUCLIDIS

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Similia polygona circulis inſcripta inter ſe ſunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & in ipſis ſimilia polygona ABCDE FGHKL; diametri autem circulorum ſint BM GN. Dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita eſſe ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Jungantur enim BE AM GL FN. & quoniam polygonum ABCDE ſimile eſt polygono FGHKL; [a] & BAE angulus angulo GFL eſt æqualis: atque eſt ut BA ad AE, ita GF ad FL. duo igitur triangula ſunt BAE GFL unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL, circa æquales autem angulos latera proportionalia: quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum [b] eſt; ac propterea angulus AEB æqualis eſt angulo FLG. ſed angulus quidem AEB angulo AMB eſt [c] æqualis; in eadem enim circumferentia conſiſtunt. angulus autem FLG æqualis [c] eſt angulo FNG. ergo & AMB angulus eſt æqualis angulo FNG. eſt autem & rectus [d] angulus BAM æqualis recto GFN. quare & reliquus reliquo æqualis. æquiangulum igitur eſt triangulum AMB triangulo FGN. ergo [e] ut BM ad GN ita BA ad GF. ſed proportionis quidem BM ad GN duplicata eſt proportio quadrati ex BM ad



[a] 1. Def. ſexti.

[b] 6. ſexti.

[c] 21. tertii.

[d] 31. tertii.

[e] 4. ſexti.

[a] 20. sexti. quadratum ex GN; proportionis vero AB ad GF duplicata[a] est proportio ABCDE polygoni ad polygonum FGHKL: [b] 11. quinti. & ut igitur quadratum ex BM [b] ad quadratum ex GN, ita polygonum ABCDE ad FGHKL polygonum. Quare similia polygona quæ in circulis describuntur, inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod demonstrare oportebat.

LEMMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium; & hoc semper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo quæ minori magnitudine expositâ minor erit.

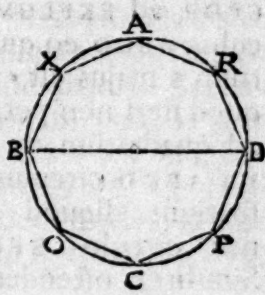
Sint duæ magnitudines inæquales AB, C, quarum major AB. Dico si ab ipsa AB auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. Etenim C multiplicata, fiet aliquando major magnitudine AB. multiplicetur, & sit DE ipsius quidem C multiplex, major autem quam AB: dividaturque DE in partes ipsi C æquales DF FG GE. & ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium BH, ab ipsa vero AH rursus majus quam dimidium auferatur HK, atque hoc semper fiat, quoad divisiones, quæ sunt in AB, multitudine æquales fiunt divisionibus quæ in DE: sint igitur divisiones AK KH HB, divisionibus DF FG GE multitudine æquales. & quoniam major est DE quam AB, & ablatum est ab ipsa quidem DE minus quam dimidium EG: ab ipsa vero AB majus quam dimidium BH: erit reliquum GD reliquo HA majus. rursus quoniam major est GD, quam HA: & ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF: ab ipsa vero HA majus quam dimidium HK: reliquum FD reliquo AK majus erit. estque FD æqualis ipsi C ergo C quam AK est major. minus igitur est AK quam C. ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK, expositæ minori magnitudine

tudine c minor. Quod demonſtrare oportebat. Similiter autem demonſtrabitur, etiam ſi dimidia ablata fuerint. *Eſt prima decimi.*

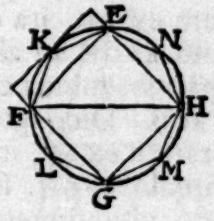
PROP. II. THEOR.

Circuli inter ſe ſunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCD EFGH, diametri autem ipſorum ſint BD FH. Dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſſe circulum ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita ſit; erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad ſpatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus. Sit primum ad minus quod ſit S. & in circulo EFGH deſcribatur quadratum EFGH. itaque deſcriptum in circulo quadratum majus eſt dimidio circuli EFGH, quoniam ſi per puncta E F G H contingentes circulum ducamus, erit deſcripti circa circulum quadrati [a] dimidium EFGH. deſcripto autem circa circulum quadrato minor eſt circulus. ergo quadratum EFGH majus eſt dimidio circuli EFGH. ſecentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis K L M N: & EK KF FL LG GM MH HN NE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EKF FLG GMH HNE majus eſt dimidio ſegmenti circuli in quo conſiſtit: quoniam ſi per puncta K L M N contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quæ ſunt in rectas lineas EF FG GH HE compleamus; erit [b] unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt. ſed ſegmentum minus eſt parallelogrammo. quare unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE majus eſt dimidio ſegmenti circuli, in quo conſiſtit. Haſce igitur circumferentias bifariam ſecantes, & jungentes rectas lineas, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quædam circuli ſegmenta. quæ minora erunt exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. etenim oſtenſum eſt in præcedenti Lemmate, duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod relinquitur, rurſus majus quam dimidium,

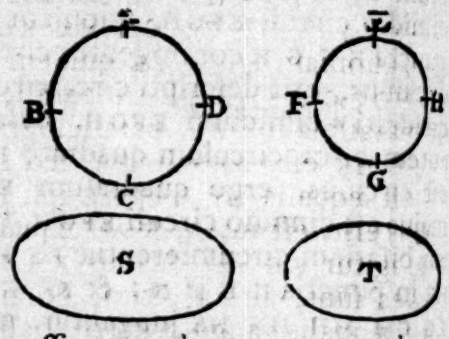


[a] 47.primi. & 31.tertii.



[b] 41.primi.

dium, & hoc ſemper fiat; relinqui tandem magnitudinem aliquam, quæ minori magnitudine expoſita ſit minor. itaque relicta ſint ſegmenta circuli EFGH in rectas lineas EK KF FL LG GM MH HN NE, quæ minora ſint exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonum majus erit ſpatio S. Deſcribatur etiam in circulo ABCD, polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. eſt igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, *c* ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. ſed & ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpatium S. ergo & *d* ut circulus ABCD ad ſpatium S, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. major autem eſt circulus ABCD eo quod in ipſo eſt polygono. quare & ſpatium S majus eſt *e* polygono EKFLGMHN. ſed & *f* minus. quod fieri non poteſt. Non igitur eſt ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH ita ABCD circulus ad ſpatium aliquod minus circulo EFGH. Similiter oſtendemus neque eſſe ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD. Dico igitur neque eſſe ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum ABCD ad aliquod ſpatium majus circulo EFGH. ſi enim fieri poteſt, ſit ad majus ſpatium S. erit igitur invertendo ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita ſpatium S ad ABCD circulum. ſed quoniam S majus eſt EFGH circulo; erit ut ſpatium S ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD. *e* ergo & ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod ſpatium minus *e* circulo ABCD, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſt circulus ABCD ad ſpatium aliquod majus EFGH circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum EFGH. Circuli igitur inter ſe ſunt ut diametrorum quadrata. Quod oſtendere oportebat.



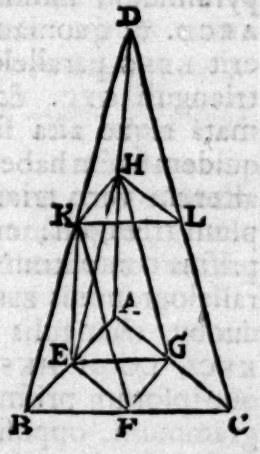
c 1. hujus.
d 11. quinti.
e 14 quinti.
f Ex hypotheſi.

PROP.

PROP. III. THEOR.

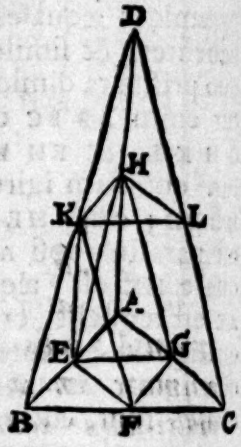
Omnis pyramis triangularem habens baſim dividitur in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe, quæ triangulares baſes habent, ſimileſque toti, & in duo priſmata æqualia, quæ quidem priſmata dimidio totius pyramidis ſunt majora.

Sit pyramis, cujus baſis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD dividi in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe, triangulares baſes habentes, & ſimiles toti, & in duo priſmata æqualia; & duo priſmata dimidio totius pyramidis eſſe majora. Secentur enim AB BC CA AD DB DC bifariam in punctis E F G H K L, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG jungantur. quoniam igitur AE quidem eſt æqualis EB, AH vero ipſi HD; erit [a] HE ipſi DB parallela. eadem ratione & HK eſt parallela ipſi AB. parallelogrammum igitur eſt HEBK. quare HK eſt [b] æqualis EB. ſed EB ipſi AE eſt æqualis. ergo & AE ipſi HK æqualis erit. eſt autem & AH æqualis HD. duæ igitur AE AH duabus KH HD æquales ſunt, altera alteri, & angulus EAH æqualis [c] angulo KHD; baſis igitur [d] EH baſi KD eſt æqualis: quare triangulum AEH æquale eſt & ſimile triangulo HKD. eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD æquale eſt & ſimile. & quoniam duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes EH HG duabus rectis lineis ſeſe tangentibus KD DL parallelæ ſunt, non autem in eodem plano, æquales angulos [e] continebunt. ergo angulus EHG eſt æqualis angulo KDL. rurſus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales ſunt, altera alteri, & angulus EHG eſt æqualis angulo KDL; erit [d] baſis EG baſi KL æqualis: æquale igitur eſt & ſimile triangulum EHG triangulo KDL. eadem ratione & AEG triangulum eſt æquale & ſimile triangulo HKL. quare pyramis cujus baſis quidem eſt AEG triangulum, vertex autem punctum H, æqualis & ſimilis eſt pyramidi cujus baſis eſt triangulum KHL, & vertex D punctum. & quoniam uni laterum trianguli ADB, videlicet ipſi AB, parallela ducta eſt HK; erit triangulum ADB triangulo DKH æquiangulum,



[a] 2. ſexti.
[b] 34. primi.
[c] 29. primi.
[d] 4. primi.
[e] 10. undecimi.

angulum, & latera habent proportionalia. ſimile igitur eſt ADB triangulum triangulo DHK. & eadem ratione triangulum quidem DBC ſimile eſt triangulo DKL; triangulum vero ADC triangulo DHL. & cum duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes BA AC duabus rectis lineis ſeſe tangentibus KH HL parallelæ ſint, non exiſtentes in eodem plano, hæ æquales angulos *f* continebunt. angulus igitur BAC angulo HKL eſt æqualis. atque eſt ut BA ad AC, ita KH ad HL, ergo ABC triangulum *g* ſimile eſt triangulo HKL; ideoque pyramis, cujus baſis quidem triangulum ABC, vertex autem punctum D, ſimilis eſt pyramidi, cujus baſis triangulum HKL, & vertex punctum D. ſed pyramis cujus baſis quidem HKL triangulum, vertex autem punctum D, oſtenſa eſt ſimilis pyramidi, cujus baſis triangulum AEG, & vertex H punctum. quare & pyramis cujus baſis triangulum ABC & vertex punctum D, ſimilis eſt pyramidi cujus baſis AEG triangulum, & vertex punctum H. utraque igitur ipſarum AEGH HKLD pyramidum ſimilis eſt toti pyramidi ABCD. & quoniam BF eſt æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum *h* dupluni trianguli GFC. & quoniam duo priſmata æque alta ſunt, quorum unum quidem baſim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum. eſtque parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea priſmata inter ſe æqualia *i*. ergo priſma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogrammis EBFG EBKH KHGF, eſt æquale priſmati quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFCL LCGH HKFG continetur. & manifeſtum eſt utrumque ipſorum priſmatum, & cujus baſis eſt EBFG parallelogrammum, oppoſita autem ipſi HK recta linea, & cujus baſis eſt GFC triangulum, & oppoſitum ipſi triangulum KLH, majus eſſe utraque pyramidum, quarum baſes quidem AEG HKL triangula, vertices autem puncta H D: quoniam ſi jungamus EF EH rectas lineas, priſma quidem, cujus baſis eſt EBFG parallelogrammum, & oppoſita ipſi recta linea KH, majus eſt pyramide cujus baſis EBF triangulum, vertex autem punctum K. ſed pyramis, cujus baſis triangulum EBF, & vertex K punctum, eſt *k* æqualis pyramidi cujus baſis AEG triangulum, & vertex punctum H; æqualibus enim & ſimilibus planis continentur. quare & priſma cujus baſis parallelogrammum EBFG, oppoſita autem ipſi



f 10. undecimi.

g 6. ſexti. & 1. Def. ejuſdem.

h 41. primi.

i 40. undecimi.

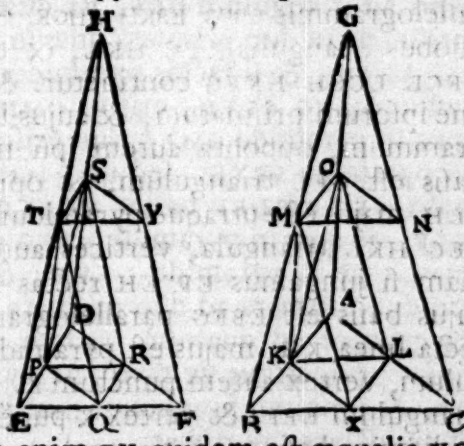
k 10. Def. undecimi.

ipſi recta linea HK, majus eſt pyramide cujus baſis AEG triangulum & vertex punctum H. priſma vero cujus baſis parallelogrammum EBFG, & oppoſita ipſi recta linea HK eſt æquale priſmati cujus baſis GFC triangulum, & ipſi oppoſitum triangulum HKL; & pyramis cujus baſis triangulum AEG, vertex autem H punctum, eſt æqualis pyramidi cujus baſis HKL triangulum, & vertex punctum D. ergo duo priſmata de quibus dictum eſt, ſunt majora duabus dictis pyramidibus quarum baſes triangula AEG HKL, vertices autem H D puncta. Tota igitur pyramis cujus baſis ABC triangulum, vertex autem punctum D, diviſa eſt in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti: & in duo priſmata æqualia: ſuntque duo priſmata dimidio totius pyramidis majora. Quæ oſtendere oportebat.

PROP. IV. THEOR.

Si ſint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares baſes habeant, dividatur autem utraque ipſarum, & in duas pyramides æquales inter ſe, ſimileſque toti, & in duo priſmata æqualia; & factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc ſemper fiat: erit ut unius pyramidis baſis ad baſim alterius, ita & in una pyramide priſmata omnia ad priſmata omnia in altera pyramide multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æque altæ quæ triangulares baſes habeant ABC DEF, vertices autem ſint puncta G H, & dividatur utraque ipſarum in duas pyramides æquales inter ſe, ſimileſque toti, & in duo priſmata æqualia; & factarum pyramidum utraque eodem modo diviſa intelligatur: atque hoc ſemper fiat. Dico ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſſe priſmata omnia quæ ſunt in pyramide ABCG ad priſmata omnia quæ in pyramide DEFH multitudine æqualia.



Quoniam enim BX quidem eſt æqualis XC, AL vero æqualis LC; erit [a] XL ipſi AB parallela, & triangulum ABC triangulo LXC ſimile. eadem ratione & triangulum

[a] 2. ſexti.

gulum DEF ſimile eſt triangulo RQF. & quoniam BC quidem eſt dupla CX, EF vero dupla ipſius FQ, ut BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & deſcripta ſunt ab ipſis BC CX ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea ABC LXC; ab ipſis vero EF FQ ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea DEF RQF. eſt igitur [b] ut ABC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. ſed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita [c] priſma cujus baſis eſt triangulum LXC, oppoſitum autem ipſi OMN, ad priſma cujus baſis RQF triangulum & oppoſitum ipſi STY. ut igitur [d] ABC triangulum ad triangulum DEF, ita priſma cujus baſis eſt triangulum LXC, oppoſitum autem ipſi OMN, ad priſma cujus baſis RQF triangulum, & oppoſitum ipſi STY. & quoniam duo priſmata quæ in pyramide ABCG inter ſe æqualia ſunt, ſed & quæ in pyramide DEFH priſmata inter ſe ſunt æqualia; erit ut priſma cujus baſis parallelogrammum KLXB, oppoſita vero ipſi recta linea MO, ad priſma cujus baſis LXC triangulum, & oppoſitum ipſi OMN, ita priſma cujus baſis parallelogrammum EPRQ, & oppoſita recta linea ST, ad priſma cujus baſis RQF triangulum, oppoſitum vero ipſi STY. quare componendo, ut priſmata KBXLMO LXCMNO ad priſma LXCMNO, ita priſmata PEQRST RQFSTY ad priſma RQFSTY. & permutando, ut priſmata KBXLMO LXCOMN ad priſmata PEQRST RQFSTY, ita priſma LXCMNO ad priſma RQFSTY. ut autem priſma LXCMNO ad priſma RQFSTY, ita oſtenſa eſt baſis LXC ad RQF baſim, & ABC baſis ad baſim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo priſmata ad duo priſmata quæ in pyramide DEFH. ſimiliter autem, & ſi factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN baſis ad baſim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo priſmata ad duo priſmata quæ in pyramide STYH. ſed ut OMN baſis ad baſim STY, ita baſis ABC ad DEF baſim. & ut igitur ABC baſis ad baſim DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo priſmata ad duo priſmata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo priſmata ad duo priſmata quæ in pyramide STYH; & quatuor ad quatuor. eadem autem oſtendentur & in factis priſmatibus ex diviſione pyramidum AKLO, & DPRS, & omnium ſimpliciter multitudine æqualium. Quod demonſtrare oportebat.

[b] 22. ſexti.

[c] 28. & 32. undecimi.

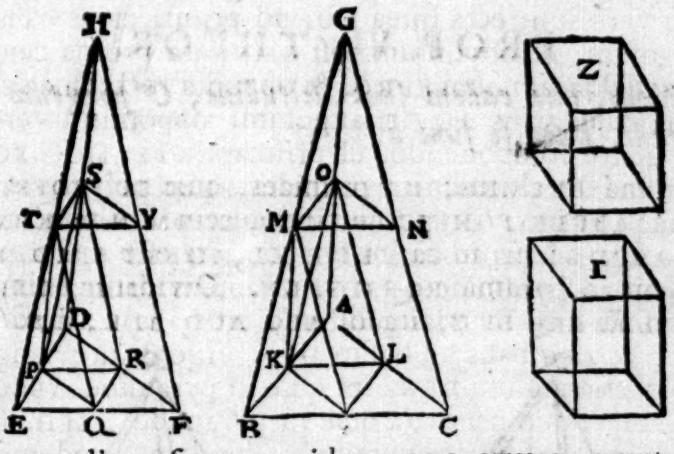
[d] 11. quinti.

PROP.

PROP. V. THEOR.

Pyramides quæ eadem ſunt altitudine, & triangulares baſes habent, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint eadem altitudine pyramides, quarum baſes quidem triangula ABC DEF, vertices autem puncta G H. Dico ut ABC baſis ad baſim DEF, ſic eſſe pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si enim non ita ſit, erit ut ABC baſis ad baſim DEF, ſic ABCG pyramis, vel ad ſolidum minus pyramide DEFH, vel ad majus. Sit primum ad ſolidum minus, ſitque Z. & dividatur pyramis DEFH in duas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, & in duo priſmata æqualia. ſunt duo igitur priſmata [a] dimidio totius pyramidis majora. & rurſus pyramides ex diviſione factæ ſimiliter dividantur, atque hoc ſemper fiat, quoad ſumantur quædam pyramides à pyramide DEFH, quæ ſint minores exceſſu quo pyramis DEFH ſolidum Z ſuperat. itaque ſumantur, & [a] 3. hujus.



ſint exempli cauſa, pyramides DPRS STYH. erunt igitur reliqua in pyramide DEFH priſmata ſolido Z majora. dividatur etiam ABCD pyramis in totidem partes ſimiles pyramidi DEFH. ergo [b] ut ABC baſis ad baſim DEF, ita quæ in pyramide ABCG priſmata ad priſmata quæ in pyramide DEFH. ſed ut ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramis ABCG ad ſolidum Z. & igitur ut ABCG pyramis ad ſolidum Z. ita quæ in pyramide ABCG priſmata ad priſmata quæ in pyramide DEFH. major autem eſt pyramis ABCG priſmatibus quæ in ipſa ſunt. ergo & ſolidum Z priſmatibus, quæ ſunt in pyramide DEFH, eſt majus. ſed & [c] minus. quod fieri non poteſt. non igitur ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt pyramis ABCG ad ſolidum aliquot minus pyramide DEFH. ſimiliter oſtendemus neque ut DEF baſis ad [b] 4. hujus. [c] Ex priùs demonſtratis.

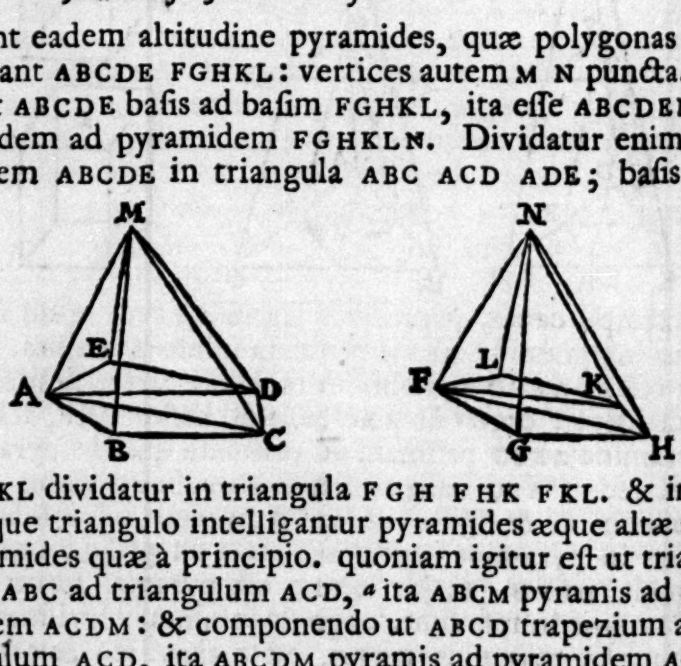
baſim

baſim ABC, ita eſſe pyramidem DEFH ad ſolidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico igitur neque eſſe ut ABC baſis ad baſim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod ſolidum majus pyramide DEFH. Si enim fieri poteſt, ſit ad majus, videlicet ad ſolidum I. erit igitur invertendo ut DEF baſis ad baſim ABC, ita ſolidum I ad ABCG pyramidem. cum autem ſolidum I majus eſt pyramide EDFH, erit ut ſolidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad ſolidum aliquod minus pyramide ABCG, ut proxime oſtenſum ſuit. & ut igitur DEF baſis ad baſim ABC, ita pyramis DEFH ad ſolidum aliquod pyramide ABCG minus, quod eſt abſurdum non igitur ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt ABCG pyramis ad ſolidum aliquod majus pyramide DEFH. oſtenſum autem eſt, neque ad minus. quare ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur quæ eadem ſunt altitudine, & triangulares baſes habent, inter ſe ſunt ut baſes. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. VI. THEOR.

Pyramides, quæ eadem ſunt altitudine, & polygonas baſes habent, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint eadem altitudine pyramides, quæ polygonas baſes habeant ABCDE FGHKL: vertices autem M N puncta. Dico ut ABCDE baſis ad baſim FGHKL, ita eſſe ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLN. Dividatur enim baſis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE; baſis vero



FGHKL dividatur in triangula FGH FHK FKL. & in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides quæ à principio. quoniam igitur eſt ut triangulum ABC ad triangulum ACD, [a] ita ABCM pyramis ad pyramidem ACDM: & componendo ut ABCD trapezium ad triangulum ACD, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ACDM. ſed & ut ACD triangulum ad ADE, ita [a] pyramis ACDM ad ADEM pyramidem. ergo ex æquali, ut ABCD baſis ad baſim ADE, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ADEM.

[a] 5. hujus.

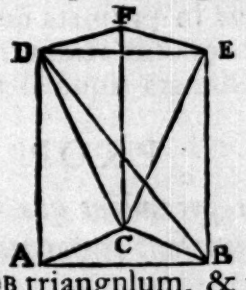
&

& rurſus componendo ut ABCDE baſis ad baſim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. eadem ratione, & ut FGHKL baſis ad baſim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & quoniam duæ pyramides ſunt ADEM FKLN, quæ triangulares baſes habent, & eadem ſunt altitudine; erit [a] ut ADE baſis ad baſim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN. quòd cum ſit ut ABCDE baſis ad baſim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM; ut autem ADE baſis ad baſim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN: erit ex æquali, ut baſis ABCDE ad FKL baſim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. ſed & ut FKL baſis ad baſim FGHKL, ita erat & FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rurſus ex æquali, ut ABCDE baſis ad baſim FGHKL, ita eſt ABCDEM pyramis ad pyramidem FGHKLN. Pyramides igitur quæ eadem ſunt altitudine, & polygonas baſes habent, inter ſe ſunt ut baſes. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. VII. THEOR.

Omne priſma triangularem habens baſim, dividatur in tres pyramides æquales inter ſe, quæ triangulares baſes habent.

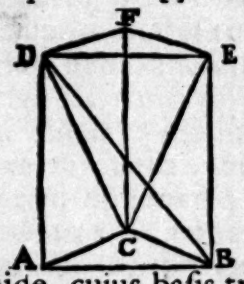
Sit priſma cujus baſis quidem triangulum ABC, oppoſitum autem ipſi DEF. Dico priſma ABCDEF dividi in tres pyramides æquales inter ſe, quæ triangulares habent baſes. Jungantur enim BD EC CD. & quoniam parallelogrammum eſt ABED cujus diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD [a] æquale. ergo pyramis cujus baſis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis [b] eſt pyramidi, cujus baſis EDB triangulum, & vertex punctum C. ſed pyramis cujus baſis EDB triangnlum, & vertex punctum C, eadem eſt cum pyramide cujus baſis triangulum EBC, & vertex D punctum: iiſdem enim planis continentur. ergo & pyramis cujus baſis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis eſt pyramidi cujus baſis EBC triangulum, & vertex punctum D. rurſus quoniam FCBE parallelogrammum eſt cujus diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE eſt [a] æquale. ergo & pyramis cujus baſis BEC triangulum, vertex autem punctum D, æqualis eſt [b] pyramidi cujus baſis triangulum ECF, & vertex punctum D. ſed pyramis cujus



[a] 34. primi.

[b] 5. hujus.

baſis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D oſtenſa eſt æqualis pyramidi cujus baſis triangulum ABD, & vertex C punctum. quare & pyramis cujus baſis triangulum CEF, & vertex punctum D, æqualis eſt pyramidi cujus baſis triangulum ABD, & vertex C punctum. priſma igitur ABCDEF dividitur in tres pyramides inter ſe æquales, quæ triangulares baſes habent. Et quoniam pyramis cujus baſis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem eſt cum pyramide, cujus baſis triangulum CAB, & vertex D punctum, iiſdem namque planis continetur: pyramis autem, cujus baſis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars oſtenſa eſt priſmatis cujus baſis ABC triangulum, & oppoſitum ipſi DEF: & pyramis igitur, cujus baſis triangulum ABC, vertex autem D punctum, tertia pars eſt priſmatis eandem baſim habentis, videlicet ABC triangulum, & oppoſitum ipſi triangulum DEF. Quod demonſtrare oportebat.



COROLL.

1. Ex hoc manifeſtum eſt omnem pyramidem tertiam partem eſſe priſmatis baſim habentis eandem, & altitudinem æqualem; quoniam ſi baſis priſmatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppoſitam ipſi eandem; dividitur in priſmata quæ triangulares baſes habent, baſibuſque oppoſita etiam triangula.

2. Priſmata æque alta ſunt inter ſe ut baſes.

PROP. VIII. THEOR.

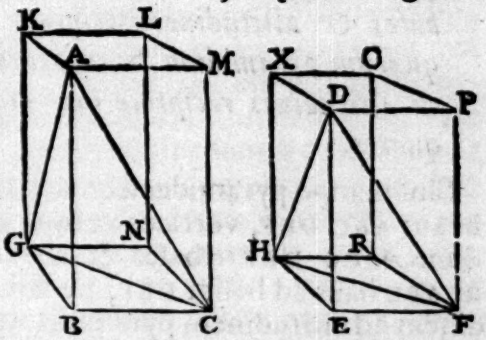
Similes pyramides quæ triangulares baſes habent, in triplicata ſunt proportione homologorum laterum.

Sint ſimiles & ſimiliter poſitæ pyramides, quarum baſes quidem triangula ABC DEF, vertices autem G H puncta. Dico ABCG pyramidem ad pyramidem DEFH, triplicatam proportionem habere ejus quam BC habet ad EF. Compleantur enim BGML EHPO ſolida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG ſimilis eſt pyramidi DEFH, erit [a] angulus ABC angulo DEF æqualis, anguluſque GBC æqualis angulo HEF, & angulus ABG angulo DEH. atque [b] eſt ut AB ad DE, ita BC ad EF, & BG ad EH. quoniam igitur eſt ut

[a] 9. Def. undecimi.

[b] 1. Def. ſexti.

ut AB ad DE, ita BC ad EF, & circum æquales angulos latera ſunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP ſimile erit. eadem ratione, & parallelogrammum NB ſimile eſt parallelogrammo ER, & parallelogrammum BK ipſi EX parallelogrammo. tria igitur parallelogramma BM KB BN. tribus EP EX ER ſunt ſimilia. ſed tria quidem MB BK BN tribus oppoſitis *c* æqualia & ſimilia ſunt, tria vero EP EX ER tribus oppoſitis æqualia & ſimilia. quare ſolida BGML EHPO ſimilibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea *d* ſimile eſt BGML ſolidum ſolido EHPO. ſimilia autem ſolida parallelepipeda in *e* triplicata ſunt proportione homologorum laterum. ergo ſolidum BGML ad ſolidum EHPO triplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. ſed *f* ut BGML ſolidum ad ſolidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim ſexta pars eſt ipſius ſolidi, cum priſma quod eſt dimidium ſolidi parallelepipedi, ſit pyramidis *g* triplum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam proportionem habebit ejus quàm BC habet ad EF. Quod demonſtrare oportebat.



c 24. undecimi.

d 9. Def. undecimi.

e 33. undecimi.

f 15. quinti.

g 1. Cor. antecedentis.

Cor. Ex hoc perſpicuum eſt, & ſimiles pyramides quæ multangulas baſes habent, inter ſe eſſe in triplicata proportione homologorum laterum. ipſis enim diviſis in pyramides triangulares baſes habentes: quoniam & ſimilia polygona quæ ſunt in baſibus, in ſimilia triangula dividuntur, *h* & numero æqualia & homologa totis; erit ut una pyramis in una pyramide triangularem habens baſim ad pyramidem in altera triangularem baſim habentem, ita & omnes pyramides in una pyramide triangulares habentes baſes ad omnes in altera triangulares baſes habentes; hoc eſt, ita pyramis ipſa multangulam habens baſim ad pyramidem quæ multangulam baſim habet. ſed pyramis triangularem habens baſim ad pyramidem quæ triangularem baſim habet, eſt in triplicata proportione homologorum laterum. & pyramis igitur polygonam habens baſim ad pyramidem ſimilem baſim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

h 20. ſexti.

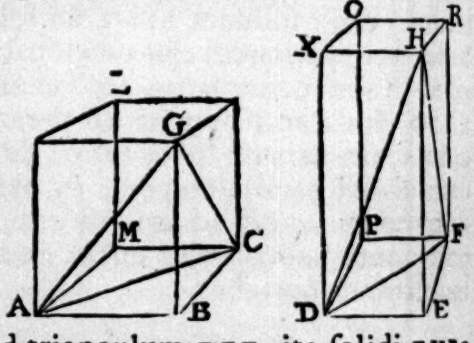
PROP. IX. THEOR.

Æqualium pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares baſes habentium, baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales, illæ ſunt æquales.

Sint nempe pyramides æquales, quæ triangulares baſes habeant ABC DEF, vertices vero G H puncta. Dico pyramidum ABCG DEFH baſes & altitudines reciprocari; ſcil. ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſſe pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. Compleantur enim BGML EHPO ſolida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG eſt æqualis pyramidi DEFH, atque eſt pyramidis quidem ABCG ſextuplum BGML ſolidum, pyramidis vero DEFH ſextuplum ſolidum EHPO; erit [a] ſolidum BGML ſolido EHPO æquale. æqualium autem ſolidorum parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocantur [b]. eſt igitur ut BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi altitudo ad altitudinem ſolidi BGML. ſed ut BM baſis ad baſim EP, ita [a] ABC triangulum ad triangulum DEF. ergo & ut ABC triangulum ad triangulum DEF, ita ſolidi EHPO altitudo ad altitudinem ſolidi BGML. ſed ſolidi quidem EHPO altitudo eadem eſt cum altitudine pyramidis DEFH; ſolidi vero BGML altitudo eadem eſt cum altitudine pyramidis ABCG: eſt igitur ut ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. quare pyramidum ABCG DEFH baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales. Et ſi pyramidum ABCG DEFH baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales, ſitque ut ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH æqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, quoniam ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG; ut autem ABC baſis ad baſim DEF, ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP: erit & ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem

[a] 15. quinti.

[b] 34. undecimi.



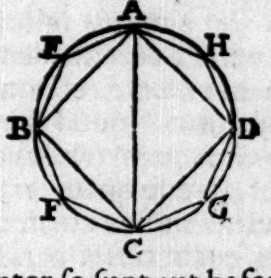
nem pyramidis ABCG. ſed pyramidis quidem DEFH altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi BGML: eſt igitur ut BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi BGML. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocantur, ea ſunt æqualia. ſolidum igitur parallelepipedum BGML æquale eſt ſolido parallelepipedo EHPO. atque eſt ſolidi quidem BGML ſexta pars pyramis ABCG: ſolidi vero EHPO itidem ſexta pars pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFH eſt æqualis. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales, illæ ſunt æquales. Quod oportebat demonſtrare.

[c] 34. undecimi.

PROP. X. THEOR.

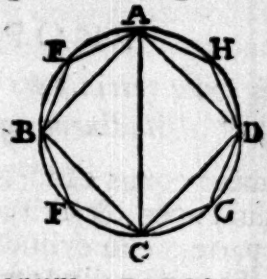
Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet & altitudinem æqualem.

Habeat conus eandem baſim quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, & altitudinem æqualem. Dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt cylindrum coni triplum eſſe. Si enim cylindrus non ſit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. ſit primo major quam triplus. & deſcribatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD majus eſt quam dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur priſma æque altum cylindro. quod quidem priſma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam ſi circa circulum ABCD quadratum deſcribatur, erit inſcriptum quadratum dimidium circumſcripti. & ſint ab eiſdem baſibus erecta ſolida parallelepipeda æque alta, nimirum priſmata ipſa. quare priſmata inter ſe ſunt ut baſes. & priſma igitur erectum à quadrato ABCD dimidium eſt priſmatis erecti à quadrato quod circa circulum ABCD deſcribitur. atque eſt cylindrus minor priſmate erecto à quadrato quod deſcribitur circa circulum ABCD. priſma igitur erectum à quadrato ABCD æque altum cylindro, dimidio cylindri eſt majus. ſecentur circumferentiæ AB BC CD DA bifariam in punctis E F G H, & AE EB BF FC CG GD DH HA



[a] 2. Cor. 7. hujus.

HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA majus [b] eſt dimidio portionis circuli ABCD, in qua conſiſtit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB EFC CGD DHA priſmata æque alta cylindro. ergo & unumquodque erectorum priſmatum majus eſt dimidio portionis cylindri quæ ad ipſum eſt. quoniam ſi per puncta E F G H parallelæ ipſis AB BC CD DA ducantur, & compleantur in ipſis AB BC CD DA parallelogramma, à quibus ſolida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuſcujuſque erectorum dimidia priſmata ea [c] quæ ſunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & ſunt cylindri portiones erectis ſolidis parallelepipedis minores. ergo & priſmata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA majora ſunt dimidio portionum cylindri quæ ad ipſa ſunt. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, jungenteſque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes priſmata æque alta cylindro, & hoc ſemper facientes, tandem relinquemus quaſdam portiones cylindri quæ [c] minores erunt exceſſu, quo cylindrus coni triplum ſuperat. relinquantur jam, & ſint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur priſma, cujus baſis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quæ cylindri, majus eſt quam triplum coni. ſed priſma cujus baſis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, triplum [d] eſt pyramidis, cujus baſis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni. & pyramis igitur cujus baſis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, major eſt cono qui baſim habet ABCD circulum. ſed & minor: (ab ipſo enim comprehenditur.) quod fieri non poteſt. non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. Dico inſuper neque cylindrum minorem eſſe quam triplum coni. Si enim fieri poteſt, ſit cylindrus minor quam triplus coni. erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri. deſcribatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD majus eſt quam dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus; pyramis igitur erecta major eſt quam coni dimidium: quoniam, ut ante demonſtravimus, ſi circa circulum quadratum deſcribatur, erit quadratum ABCD dimidium ejus quod circa circulum deſcriptum eſt: & ſi à quadratis erigantur ſolida parallelepipeda æque alta cono, quæ & priſmata appellantur

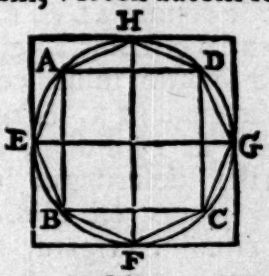


[b] oſtenditur. ad 2. hujus.

[c] Lemma hujus.

[d] 1. Cor. 7. hujus.

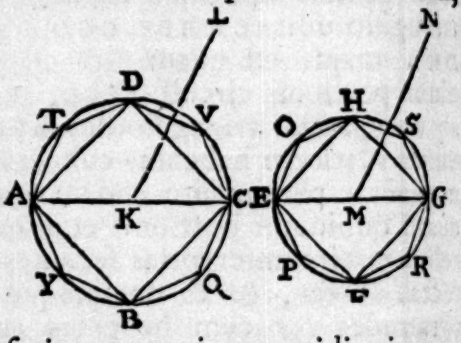
pellantur erit [d] quod à quadrato ABCD erigitur, dimidium ejus, quod erectum eſt à quadrato circa circulum deſcripto; etenim inter ſe ſunt ut baſes. quare & tertiæ partes ipſarum. pyramis igitur cujus baſis quadratum ABCD, dimidia eſt ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum deſcripto erigitur. ſed pyramis erecta à quadrato deſcripto circa circulum, major eſt cono; ipſum namque comprehendit. ergo pyramis cujus baſis ABCD quadratum, vertex autem idem qui coni, major eſt quam coni dimidium. ſecentur circumferentiæ AB BC CD DA bifariam in punctis E F G H. & jungantur AE EB BF FC CG GD DH HA. & unumquodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA majus eſt quam dimidium portionis circuli ABCD, in qua conſiſtit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA pyramides verticem habentes eundem quem conus. ergo & unaquæque pyramidum eodem modo erectarum major eſt quàm dimidium portionis coni quæ eſt ad ipſam. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, jungenteſque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, & hoc ſemper facientes, [e] relinquemus tandem quaſdem coni portiones quæ minores erunt exceſſu quo conus tertiam cylindri partem ſuperat. relinquantur; & ſint quæ in ipſis AE EB BF FC CG GD DH HA. reliqua igitur pyramis cujus baſis polygonum AEBFCGDH, & vertex idem qui coni, major eſt quam tertia cylindri pars. ſed pyramis cujus baſis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, tertia pars eſt priſmatis cujus baſis polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quæ cylindri. priſma igitur cujus baſis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, majus eſt cylindro cujus baſis eſt circulus ABCD. ſed & minus: (ab ipſo enim comprehenditur.) quod fieri non poteſt. non igitur cylindrus minor eſt quam triplus coni. oſtenſum autem eſt neque majorem eſſe quam triplum. ergo cylindrus coni triplus ſit neceſſe eſt; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem quam ipſe baſim habentis, & altitudinem æqualem. Quod demonſtrare oportebat.



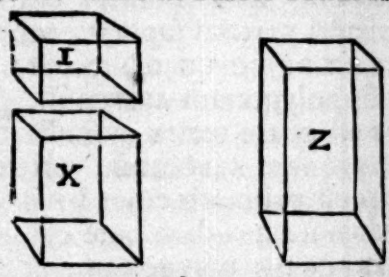
PROP. XI. THEOR.

Coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint in eadem altitudine coni & cylindri, quorum baſes circuli ABCD EFGH, axes autem KL MN, & diametri baſium AC EG. Dico ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita eſſe conum AL ad EN conum. Si enim non ita ſit; erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod ſolidum minus cono EN, vel ad majus. ſit primo ad minus quod ſit X. & quo minus eſt ſolidum X cono EN, ei æquale ſit I ſolidum. conus igitur EN ipſis ſolidis X I eſt æqualis. deſcribatur in EFGH circulo quadratum EFGH, quod majus eſt dimidio circulo. erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. pyramis igitur erecta major eſt coni dimidio. nam ſi circa circulum quadratum deſcribamus, & ab ipſo erigamus pyramidem



æque altam cono; erit inſcripta pyramis pyramidis circumſcriptæ dimidium: etenim inter ſe [a] ſunt ut baſes. conus autem circumſcripta pyramide eſt minor. ergo pyramis cujus baſis quadratum EFGH, vertex autem idem qui coni, major eſt coni dimidio. ſecentur circumferentiæ EF FG GH HE bfiariam in punctis P R S O; & OE EP PF FR RG GS SH HO jungantur. unumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH majus eſt quam dimidium ſegmenti circuli in quo conſiſtit. erigatur ab unoquoque triangulorum HOE EPF FRG GSH pyramis æque alta cono. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major eſt dimidio portionis coni, quæ eſt ad ipſam. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, & jungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque altas cono, atque hoc ſemper facientes, [b] relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ ſolido I minores erunt. relinquantur, & ſint quæ in ipſis HO OE EP PF FR RG GS SH.



[a] 6. hujus.

[b] Lemma hujus.

SH. reliqua igitur pyramis cujus baſis polygonum HOEPFRGS, altitudo autem eadem quæ coni, major eſt ſolido X. deſcribatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS ſimile & ſimiliter poſitum polygonum DTAYBQCV, & ab ipſo erigatur pyramis æque alta cono AL. quoniam igitur eſt ut quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita [c] DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus [d] ad circulum EFGH: erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, [e] ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. ſed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X ſolidum: & ut polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS, [f] ita pyramis cujus baſis DTAYBQCV polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus baſis polygonum HOEPFRGS, & vertex punctum N. ut igitur conus AL ad X ſolidum, ita pyramis, cujus baſis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L, ad pyramidem cujus baſis polygonum HOEPFRGS, & vertex N punctum. conus autem AL major eſt pyramide quæ eſt in ipſo. majus igitur eſt ſolidum X pyramide quæ eſt in cono EN. ſed & oſtenſum eſt minus. quod fieri non poteſt. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita eſt A L conus ad ſolidum aliquod minus cono EN. ſimiliter demonſtrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita eſſe conum EN ad aliquod ſolidum minus cono A L. Dico præterea neque eſſe ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod ſolidum majus cono EN. Si enim fieri poteſt, ſit ad ſolidum majus, quod ſit Z. ergo invertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD ita erit ſolidum Z ad AL conum. ſed cum ſit ſolidum Z majus cono EN; erit ut ſolidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod ſolidum minus cono AL. & igitur ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod ſolidum minus cono AL, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod ſolidum majus cono EN. oſtenſum autem eſt neque eſſe ad minus. ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita eſt conus AL ad EN conum. ſed ut conus ad conum, ita [f] eſt cylindrus ad cylindrum; eſt enim uterque utriuſque [g] triplus. & igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita in ipſis cylindri æque alti conis. Ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes. Quod demonſtrare oportebat.

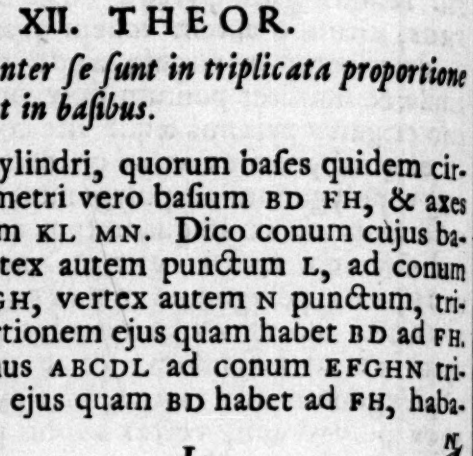
[c] 1. hujus.
[d] 2. hujus.
[e] 11. quinti.
[f] 15. quinti.
[g] 10. hujus.

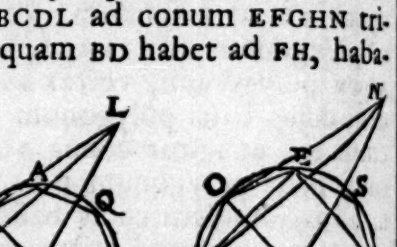
PROP.

PROP. XII. THEOR.

Similes coni & cylindri inter ſe ſunt in triplicata proportione diametrorum quæ ſunt in baſibus.

Sint ſimiles coni & cylindri, quorum baſes quidem circuli ABCD EFGH, diametri vero baſium BD FH, & axes conorum vel cylindorum KL MN. Dico conum cujus baſis ABCD circulus, vertex autem punctum L, ad conum cujus baſis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus quam habet BD ad FH. Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplicatam proportionem ejus quam BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad aliquod ſolidum minus cono EFGHN triplicatam proportionem, vel, ad majus. Habeat primo ad minus, quod ſit X. & deſcribatur in EFGH. circulo quadratum EFGH. quadratum igitur EFGH majus eſt dimidio EFGH circuli. & erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. ergo erecta pyramis major eſt quam coni dimidium. itaque ſecentur EF FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis O P R S, & jungantur EO OF FP PG GR RH HS SE. unumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE majus eſt dimidio ſegmenti circuli EFGH, in quo conſiſtit. & erigatur ab unoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem verticem habens quem conus. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major eſt quam dimidium portionis coni, quæ eſt ad ipſam. ſecantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungenteſque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem quem conus, atque hoc ſemper facientes, [a] tandem relinquemus quaſdam coni portiones quæ minores erunt exceſſu quo conus EFGHN ipſum X ſolidum ſuperat. relinquantur, & ſint quæ in ipſis EO OF FP PG GR RH HS SE. reliqua igitur pyramis cujus baſis quidem polygonum





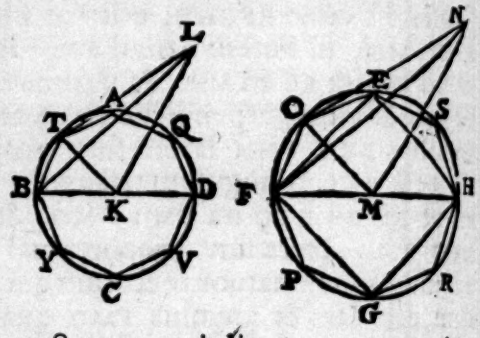
[a] Lemma hujus.

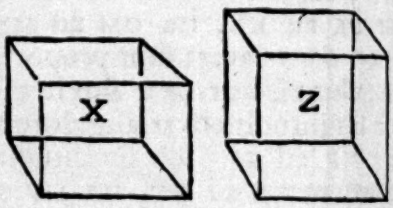
gonum EOFPGRHS, vertex autem N punctum, major eſt ſolido X. deſcribatur etiam in circulo ABCD, polygono EOFPGRHS ſimile & ſimiliter poſitum polygonum ATBYCVDQ: à quo erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus: & triangulorum continentium pyramidem cujus baſis quidem eſt polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, unum ſit LBT; triangulorum vero continentium pyramidem cujus baſis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, unum ſit NFO: & jungantur KT MO. quoniam igitur conus ABCDL ſimilis eſt cono EFGHN, erit [b] ut BD ad FH, ita KL axis ad axem MN, ut autem BD ad FH, [c] ita BK ad FM. itaque ut BK ad FM ita KL ad MN: & permutando ut BK ad KL, ita FM ad MN. & cum perpendicularis utraque eſt, & circa æquales angulos BKL FMN latera ſunt proportionalia: ſimile igitur [d] eſt BKL triangulum triangulo FMN. Rurſus quoniam eſt ut BK ad KT, ita FM ad MO, & circa æquales angulos BKT FMO latera ſunt proportionalia; etenim quæ pars eſt angulus BKT quatuor rectorum qui ſunt ad K centrum, eadem eſt pars & angulus FMO quatuor rectorum qui ſunt ad centrum M; erit [b] triangulum BKT triangulo FMO ſimile. & quoniam oſtenſum eſt ut BK ad KL, ita eſſe FM ad MN; æqualis autem eſt BK ipſi KT, & FM ipſi MO: erit ut TK ad KL, ita OM ad MN: & circa æquales angulos TKL OMN latera ſunt proportionalia; recti enim ſunt: triangulum igitur LKT ſimile eſt triangulo MNO. quod cum ob ſimilitudinem triangulorum BKL FMN, ſit ut LB ad BK, ita NF ad FM; ob ſimilitudinem vero triangulorum BKT FMO, ut KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali ut LB ad BT, ita NF ad FO. rurſus cum ob ſimilitudinem triangulorum LTK NOM, ſit ut LT ad TK, ita NO ad OM; & ob ſimilitudinem triangulorum KBT OMF, ut KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit ut LT ad TB, ita NO ad OF, oſtenſum autem eſt & ut TB ad BL, ita OF ad FN. quare rurſus ex æquali ut TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia ſunt latera, ideoque æquiangula ſunt LTB NOF triangula, & inter ſe [e] ſimilia. quare & pyramis cujus baſis triangulum BKT, vertex autem L punctum, ſimilis eſt pyramidi cujus baſis FMO triangulum, & vertex punctum N; ſimilibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem ſimiles, & quæ triangulares baſes habent, in [f] triplicata ſunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplicatam habet proportionem ejus quam BK habet ad FM. ſimiliter à punctis quidem A Q D V C Y ad K, à punctis vero E S H R G P ad M ducentes rectas lineas

[b] 24. Def. undecimi.
[c] 15. quinti.
[d] 6. ſexti.
[e] 5. ſexti.
[f] 8. hujus.

lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eoſdem habentes quos coni, oſtendemus & unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus quam habet BK latus ad homologum latus MF, hoc eſt quam BD ad FH. ſed ut unum antecedentium ſ ad unum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia. eſt igitur & ut BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis cujus baſis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem cujus baſis polygonum EOFPGRHS, & vertex punctum N. quare & pyramis cujus baſis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus baſis polygonum, EOFPGRHS, & vertex punctum N, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. ponitur autem conus cujus baſis circulus AB CD vertex autem punctum L, ad ſolidum X triplicatam proportionem habere ejus quam BD ad FH. ut igitur conus cujus baſis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad ſolidum X, ita eſt pyramis cujus baſis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus baſis polygonum EOFPGRHS, & vertex punctum N. dictus autem conus major eſt pyramide quæ in ipſo; etenim eam comprehendit. majus igitur eſt & ſolidum X pyramide cujus baſis polygonum EOFPGRHS, vertex autem punctum N. ſed & minus. quod fieri non poteſt. non igitur conus cujus baſis ABCD circulus, & vertex punctum L, ad aliquod ſolidum minus cono cujus baſis circulus EFGH, & vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. Similiter demonſtrabimus neque conum EFGHN ad aliquod ſolidum minus cono ABCDL triplicatam proportionem habere ejus quam habet FH ad BD. Itaque dico neque ABCDL conum ad ſolidum majus cono EFGHN triplicatam habere proportionem ejus quam BD habet ad FH. Si enim fieri poteſt, habeat ad aliquod ſolidum majus, quod ſit Z. invertendo

ſ 12. quinti.





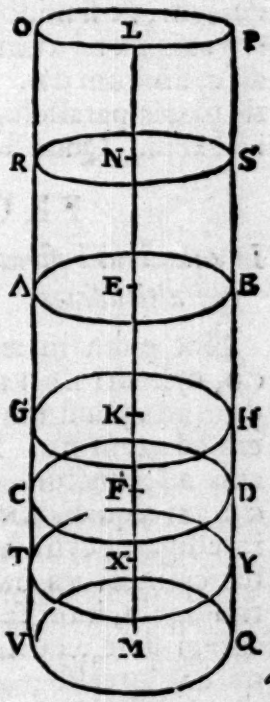
vertendo igitur, ſolidum Z ad conum ABCDL triplicatam proportionem habet ejus quam FH ad BD. cum autem eſt ſolidum Z majus cono EFGHN; erit ut ſolidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod ſolidum minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad ſolidum aliquod minus cono ABCDL triplicatam proportionem habebit ejus quam FH habet ad BD, quod fieri non poſſe demonſtratum eſt. non igitur ABCDL conus ad ſolidum aliquod majus cono EFGHN, triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. oſtenſum autem eſt neque ad minus. Quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. ut autem conus ad conum, ita [h] cylindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem exiſtens baſi in qua conus, & ipſi æque altus, coni [i] triplus eſt, cum oſtenſum ſit, omnem conum tertiam partem eſſe cylindri eandem quam ipſe baſim habentis, & æqualem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus quam BD habet ad FH. Similes igitur coni & cylindri inter ſe ſunt in triplicata proportione diametrorum quæ ſunt in baſibus. Quod demonſtrare oportebat.

[h] 15. quinti.

[i] 10. hujus.

PROP. XIII. THEOR.

Si cylindrus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

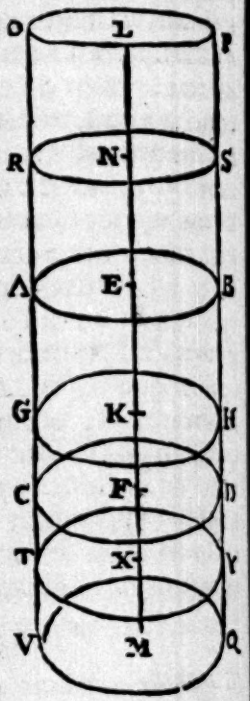


Cylindrus enim AD plano GH ſecetur oppoſitis planis AB CD parallelo, & occurrat axi EF in K puncto. Dico ut BG cylindrus ad cylindrum GD, ita eſſe EK axem ad axem KF. Producatur enim EF axis ex utraque parte ad puncta L, M; & ipſi quidem EK axi ponantur æquales quotcunque EN NL; ipſi vero FK æquales quotcunque FX XM: & per puncta L N X M ducantur plana ipſis AB, CD parallela: atque in planis per L N X M circa centra L N X M intelligantur circuli OP RS TY VQ æquales ipſis AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligantur. quoniam igitur axes LN NE EK inter ſe ſunt æquales, erunt cylindri PR RB BG inter ſe [a] ut baſes. æquales autem ſunt baſes. ergo & cylindri PR RB BG ſunt æquales. quod cum axes LN NE EK inter

[a] 11. hujus.

ſe

ſe æquales ſint, itemque cylindri PR RB BG inter ſe æquales; ſitque ipſorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipſorum PR RB BG: quotuplex eſt axis KL ipſius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB. eadem ratione & quotuplex eſt MK axis ipſius axis KF, totuplex eſt & QG cylindrus cylindri GD. & ſi quidem axis KL ſit æqualis axi KM, erit & PG cylindrus cylindro GQ æqualis; ſi autem axis LX major ſit axe KM, & cylindrus PG major erit cylindro GQ; & ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK KF, & cylindris BG GD, ſumpta ſunt æque multiplicia, axis quidem EK, & BG cylindri, nempe axis KL, & cylindrus PG; axis vero KF, & cylindri GD æque multiplicia, axis ſcilicet KM, & GQ cylindrus: & demonſtratum eſt ſi LK axis ſuperat autem KM, & PG cylindrum ſuperare cylindrum GQ; & ſi æqualis æqualem; & ſi minor minorem. eſt [b] igitur axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare ſi cylindrus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod demonſtrare oportebat.



[b] 5. Def. quinti.

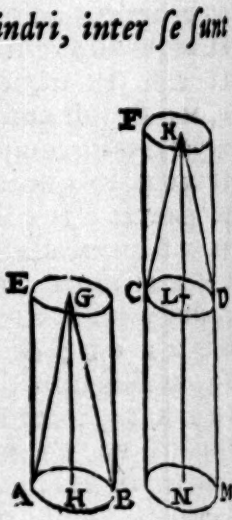
PROP. XIV. THEOR.

In æqualibus baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus baſibus AB CD, cylindri EB FD. Dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita eſſe GH axem ad axem KL. Producatur enim KL axis ad punctum N, ponaturque ipſi GH axi æqualis LN; & circa axem LN intelligatur cylindrus CM. quoniam igitur cylindri EB CM eandem habent altitudinem, inter ſe [a] ſunt ut baſes. baſes autem ſunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter ſe æquales erunt. & quoniam cylindrus FM ſecatur plano CD, oppoſitis planis parallelo, erit [b] ut CM

[a] 11. hujus.

[b] 13. hujus.



cylin-

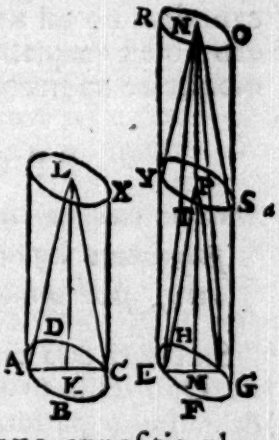
cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem. æqualis autem eſt cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. eſt igitur ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita axis GH ad KL axem. ut autem EB cylindrus ad cylindrum FD, ita [c] ABG conus ad conum CDK; cylindri ſunt enim conorum [d] tripli. ergo & ut GH axis ad axem KL, ita eſt ABG conus ad conum CDK, & cylindrus EB ad FD cylindrum. In baſibus igitur æqualibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt ut altitudines. Quod demonſtrare oportebat.

[c] 15. quinti.
[d] 10. hujus.

PROP. XV. THEOR.

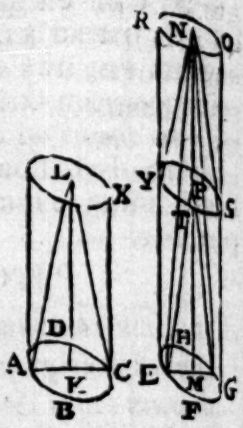
Æqualium conorum & cylindrorum baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales; & quorum conorum & cylindrorum baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales, illi inter ſe ſunt æquales.

Sint æquales coni & cylindri, quorum baſes quidem AB CD EFGH circuli, & diametri ipſorum AC EG; axes autem KL MN; qui quidem & conorum vel cylindorum ſunt altitudines: & compleantur cylindri AX EO. Dico cylindrorum AX EO baſes & altitudines reciproce proportionales eſſe, hoc eſt, ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſſe altitudinem MN ad altitudinem KL. altitudo enim KL vel æqualis eſt altitudini MN, vel non æqualis. Sit primo æqualis. atque eſt AX cylindrus æqualis cylindro EG. qui autem eandem habent altitudinem coni & cylindri inter ſe ſunt [a] ut baſes. æqualis igitur eſt baſis ABCD baſi EFGH. eſt igitur ut baſis ABCD ad EFGH baſim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. Non ſit autem altitudo KL altitudini MN æqualis, ſed major ſit MN, & auferatur, ab ipſa MN altitudini LK æqualis PM, & per P ſecetur EO cylindrus plano TYS oppoſitis planis circulorum EFGH RO parallelo, intelligaturque cylindrus ES cujus baſis quidem EFGH circulus, altitudo autem PM. quoniam igitur AX cylindrus æqualis eſt cylindro EO, alius autem aliquis eſt cylindrus ES; erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, [b] ita cylindrus EO ad ES cylindrum. ſed ut AX cylindrus ad cylindrum ES, [a] ita baſis ABCD ad EFGH baſim; cylindri enim AX ES eandem habent altitudinem: ut autem cylindrus EO ad ES cylindrum



[a] 11. hujus.
[b] 7. quinti.

drum [c], ita MN altitudo ad altitudinem MP; nam cylindrus EO secatur plano TYS, oppositis planis parallelo. est igitur ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autem est MP altitudo altitudini KL. quare ut basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. æqualium igitur cylindrorum AX EO bases & altitudines reciproce sunt proportionales.



Sed si cylindrorum AX EO bases & altitudines sunt reciproce proportionales: hoc est, ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem. Dico AX cylindrum cylindro EO æqualem esse. Iisdem enim constructis; quoniam ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL æqualis est altitudini MP: erit ut ABCD basis ad basim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP. sed ut ABCD basis ad basim EFGH, [d] ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem: ut autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita [e] cylindrus EO ad ES cylindrum. est igitur ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO est [e] æqualis. similiter autem & in conis. Quod demonstrare oportebat.

c 13 hujus.

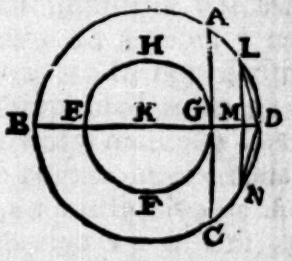
d 11. hujus.

e 9. quinti.

PROP. XVI. PROBL.

Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in majori polygonum æqualium & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. Oportet in majori circulo ABCD polygonum æqualium & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum EFGH. Ducatur per K centrum recta linea BD, atque à puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur AG, & ad C producatur, quæ AC circulum EFGH [a] tanget.



Itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, & ejus dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes, [b] tandem relinquemus

a 16. tertii.

b Lemma hujus.

relinquemus circumferentiam minorem ipſa AD. relinquatur ſitque LD: & à puncto L ad BD perpendicularis [a] agatur LM, & ad N producatur; jungunturque LD DN. ergo LD ipſi DN eſt [d] æqualis, & quoniam LN parallela eſt AC, & AC tangit circulum EFGH; ipſa LN circulum EFGH non tanget. & multo minus tangent circulum EFGH rectæ lineæ LD DN. quod ſi ipſi LD æquales deinceps circulo ABCD aptabimus, deſcribetur in eo polygonum æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circulum EFGH. Quod facere oportebat.

[a] 12. primi.
[d] 3. & 29. tertii.

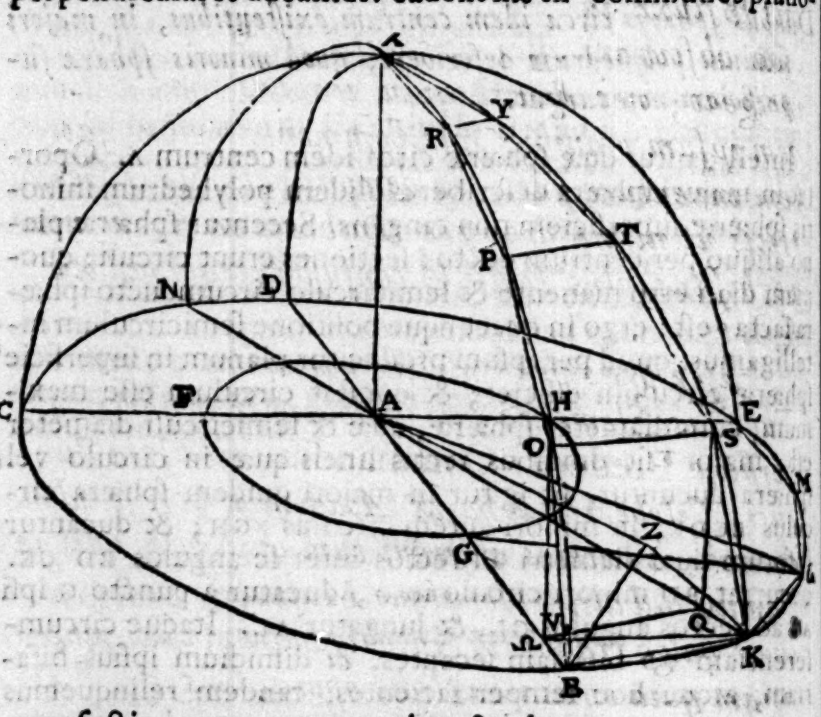
PROP. XVII. PROBL.

Duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſolidum polyhedrum deſcribere, quod minoris ſphæræ ſuperficiem non tangat.

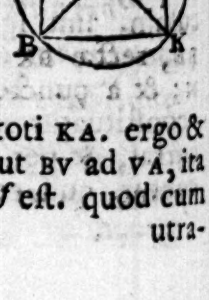
Intelligantur duæ ſphæræ circa idem centrum A. Oportet in majori ſphæra deſcribere ſolidum polyhedrum minoris ſphæræ ſuperficiem non tangens. Secentur ſphæræ plano aliquo per centrum ducto: ſectiones erunt circuli; quoniam diametro manente & ſemicirculo circumducto ſphæra facta [a] eſt: ergo in quacunque poſitione ſemicirculum intelligamus, quod per ipſum producitur planum in ſuperficie ſphæræ circulum efficiet; & conſtat circulum eſſe maximum, cum diameter ſphæræ, quæ & ſemicirculi diameter eſt, major [b] ſit omnibus rectis lineis quæ in circulo vel ſphæra ducuntur. ſit igitur in majori quidem ſphæra circulus BCDE, in minori autem circulus FGH; & ducantur ipſorum duæ diametri ad rectos inter ſe angulos BD CE. occurrat BD minori circulo in G; ducatur à puncto G ipſi AG ad rectos angulos GL, & jungatur AL. Itaque circumferentiam EB bifariam ſecantes, & dimidium ipſius bifariam, atque hoc ſemper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem ea parte circumferentiæ circuli BCD, quæ ſubtenditur à recta æquali ipſi GL. relinquatur, ſitque circumferentia BK. minor igitur eſt recta BK quam GL; eritque BK latus polygoni æqualium & parium numero laterum non tangentis minorem circulum. ſint igitur polygoni latera in quadrante circuli BE, rectæ BK KL LM ME; & juncta K A producatur ad N: & à puncto A plano circuli BCDE ad rectos angulos [c] conſtituatur AX, quæ ſuperficiei ſphæræ in puncto X occurrat, & per AX & utramque ipſarum BD KN plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in ſuperficie ſphæræ

[a] Def. 14. undecimi.
[b] 15. tertii.
[c] 12. undecimi.

maximos circulos. itaque efficiant, & ſint in diametris BD KN eorum ſemicirculi BXD KXN. quoniam igitur XA recta eſt ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana quæ per
d 18. undecimi. ipſam XA tranſeunt, ad idem circuli planum d recta: quare & ſemicirculi BXD KXN recti ſunt ad idem planum. & quoniam ſemicirculi BED BXD KXN æquales ſunt in æqualibus enim conſiſtunt BD KN diametris; erunt & eorum quadrantes BE BX KX inter ſe æquales. quot igitur latera polygoni ſunt in quadrante BE, tot erunt & in quadrantibus BX KX, æqualia ipſis BK KL LM ME. deſcribantur, & ſint BO OP PR RX, KS ST TY YX: jungantur-
e 38. undecimi. que SO TP YR; & ab ipſis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur. cadent hæ in e communes plano-



rum ſectiones BD KN, quoniam & plana ſemicirculorum BXD KXN ad planum circuli BCDE recta ſunt. itaque cadant, ſintque OV SQ, & VQ jungatur. cum igitur in æqualibus ſemicirculis BXD KXN, æquales circumferentiæ ſumptæ ſint BO KS, & ductæ perpendiculares OV SQ, erit OV quidem ipſi SQ æqualis, BV vero æqualis KQ. eſt autem & tota BA æqualis toti KA. ergo & reliqua VA reliquæ QA eſt æqualis. igitur ut BV ad VA, ita
f 2. ſexti. KQ ad QA: ideoque VQ ipſi BK parallela f eſt. quod cum

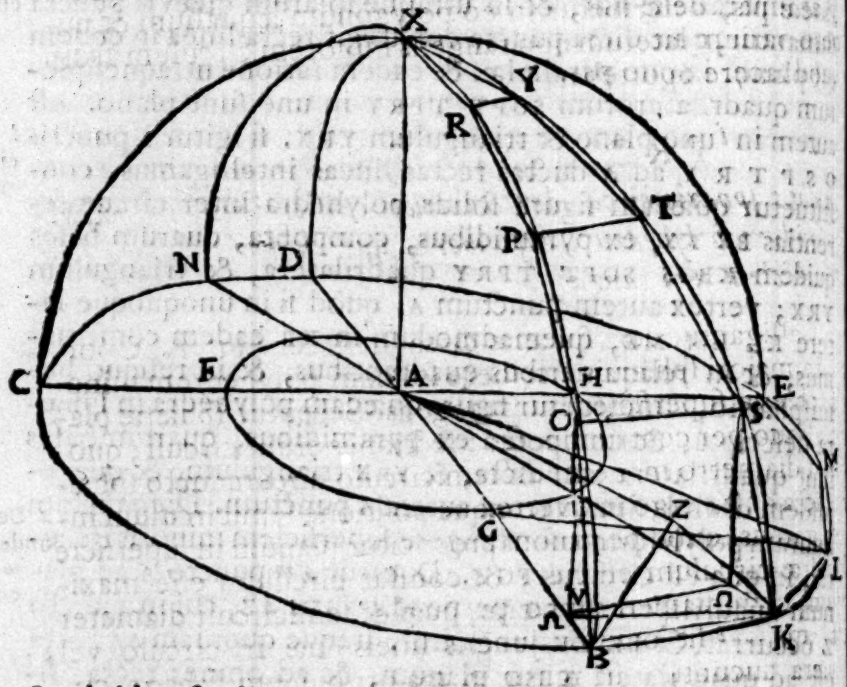


utra-

utraque ipſarum OV SQ recta ſit ad circuli BCDE planum, erit OV ipſi SQ [g] parallela. oſtenſa autem eſt & ipſi æqualis. ergo QV SO æquales [h] ſunt & parallelæ. & quoniam QV parallela eſt ipſi SO, ſed & parallela ipſi KB; erit & SO ipſi KB parallela; & ipſas conjungunt BO KS. ergo & KBOS quadrilaterum eſt in uno [k] plano; nam ſi duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, & in utraque ipſarum quævis puncta ſumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem eſt plano, in quo parallelæ. & eadem ratione utraque ipſorum quadrilaterorum SOPT TPRY in uno ſunt plano. eſt autem in [l] uno plano & triangulum YRX. ſi igitur à punctis OSPTRY ad A ductas rectas lineas intelligamus, conſtituetur quædam figura ſolida polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus, compoſita, quarum baſes quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX; vertex autem punctum A, quòd ſi in unoquoque latere KL LM ME, quemadmodum in KB eadem conſtruamus, & in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemiſphærio, conſtituetur figura quædam polyhedra in ſphæra deſcripta, & compoſita ex pyramidibus, quarum baſes ſunt quadrilatera jam dicta, & YRX triangulum, & quæ ejuſdem ordinis ſunt, vertex autem A punctum. Dico dictam figuram polyhedram non tangere ſuperficiem minoris ſphæræ, in qua eſt circulus FGH. Ducatur à [m] puncto A ad planum quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurrat, & BZ ZK jungantur. itaque quoniam AZ recta eſt ad quadrilateri KBSO planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano [n] rectos angulos faciet. ergo AZ ad utramque ipſarum BZ ZK eſt perpendicularis. & quoniam AB eſt æqualis AK, erit & quadratum ex AB quadrato ex AK æquale: & ſunt quadrato quidem ex AB æqualia [o] quadrata ex AZ ZB, angulus enim ad Z rectus eſt; quadrato autem ex AK æqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex AZ ZK æqualia ſunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur quod ex BZ reliquo quod ex ZK eſt æquale: ergo recta BZ rectæ ZK æqualis. Similiter oſtendemus, & quæ à puncto Z ad puncta O S ducuntur utrique ipſarum BZ ZK æquales eſſe. circulus igitur centro Z & intervallo una ipſarum ZB ZK deſcriptus etiam per puncta O S tranſibit. & quoniam in circulo eſt BKSO quadrilaterum, & ſunt æquales OB BK KS & minor OS, erit angulus BZK obtuſus; ideoque BK major quam BZ. ſed & GL quam BK eſt major multo. igitur major eſt GL quam BZ. & quadratum ex GL quadrato ex BZ majus. & cum æqualis AL

[g] 6. undecimi.
[h] 33. primi.
[i] 9. undecimi.
[k] 7. undecimi.
[l] 2. undecimi.
[m] 11. undecimi.
[n] 3. Def. undecimi.
[o] 47. primi.

ipſi AB, erit quadratum ex AL quadrato ex AB æquale: ſed quadrato quidem ex AL æqualia ſunt quadrata ex AG GL, quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA; quadrata igitur ex AG GL æqualia ſunt quadratis ex BZ ZA; quorum quadratum ex BZ minus eſt quadrato ex GL: ergo reliquum ex ZA quadratum majus eſt quadrato ex AG;



& ob id recta linea ZA major eſt recta AG. atque eſt AZ quidem ad unam polyhedri baſim, AG vero ad ſuperficiem minoris ſphæræ perpendicularis. quare polyhedrum minoris ſphæræ ſuperficiem non tanget. Duabus igitur ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſolidum deſcriptum eſt minoris ſphæræ ſuperficiem non tangens. Quod facere oportebat.

Cor. Quod ſi etiam in altera ſphæra ſolido polyhedro deſcripto, in ſphæra BCDE ſimile ſolidum polyhedrum deſcribatur; habebit ſolidum polyhedrum in ſphæra BCDE ad ſolidum polyhedrum in altera ſphæra triplicatam proportionem ejus, quam diameter ſphæræ BCDE habet ad alterius ſphæræ diametrum. diviſis enim ſolidis in pyramides numero æquales, & ejuſdem ordinis: erunt pyramides ſimiles. ſimiles autem pyramides inter ſe in triplicata ſunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis cujus baſis eſt KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad

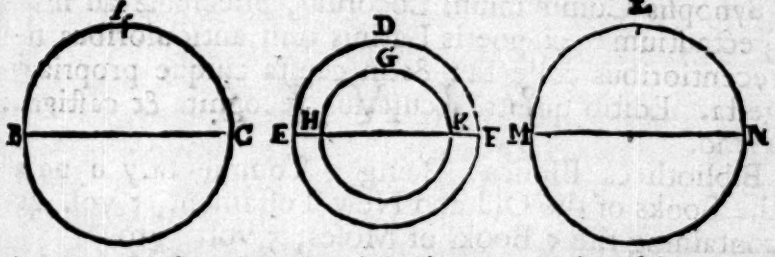
ad pyramidem in altera ſphæra ejuſdem ordinis triplicatam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc eſt, quam habet AB ex centro ſphæræ circa centrum A exiſtentis, ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. ſimiliter & unaquæque pyramis earum, quæ ſunt in ſphæra circa centrum A, ad unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis, quæ ſunt in altera ſphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet AB ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. Et ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia. quare totum ſolidum polyhedrum, quod eſt in ſphæra circa centrum A, ad totum ſolidum polyhedrum, quod in altera ſphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet AB ad eam quæ eſt ex centro alterius ſpræræ, hoc eſt, quam habet BD diameter ad alterius ſphæræ diametrum.

PROP. XVIII. THEOR.

Sphæræ inter ſe in triplicata ſunt proportione ſuarum diametrorum.

Intelligantur ſphæræ ABC DEF; quarum diametri BC EF. Dico ABC ſphæram ad ſphæram DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam habet BC ad EF. Si enim non ita eſt, ſphæra ABC ad ſphæram minorem ipſa DEF, vel ad majorem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet BC ad EF. Habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK. & intelligatur ſphæra DEF circa idem centrum, circa quod ſphæra GHK: deſcribaturque in majori ſphæra DEF ſolidum polyhedrum non tangens [a] minorem ſphæram GHK in ſuperficie; & in ſphæra ABC deſcribatur ſolidum polyhedrum ſimile ei, quod in ſphæra DEF deſcriptum eſt. ſolidum igitur polyhedrum, quod in ſphæra ABC, ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphæra DEF, triplicatam [b] proportionem habet ejus, quam BC ad EF. habet autem ABC ſphæra ad ſphæram GHK triplicatam proportionem ejus, quam BC ad EF. ergo ut ABC ſphæra ad ſphæram GHK,

[a] 17. hujus.



[b] Cor. antecedente.

GHK, ita ſolidum polyhedrum in ſphæra ABC ad ſolidum polyhedrum in ſphæra DEF; & permutando, ut ABC ſphæra ad ſolidum polyhedrum, quod in ipſa eſt, ita GHK ſphæra ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphæra DEF. major autem eſt ſphæra ABC ſolido polyhedro, quod eſt in ipſa. ergo & GHK ſphæra polyhedro, quod in ſphæra DEF, eſt major. ſed & minor, ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt. non igitur ABC ſphæra ad ſphæram minorem ipſa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. ſimiliter oſtendemus neque DEF ſphæram ad ſphæram minorem ipſa ABC triplicatam habere proportionem ejus, quam habet EF ad BC. Dico inſuper ſphæram ABC neque ad majorem ſphæram ipſa DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam BC ad EF. Si enim fieri poteſt, habeat ad majorem LMN. invertendo igitur, ſphæra LMN ad ABC ſphæram triplicatam proportionem habet ejus, quam diameter EF ad BC diametrum. ut autem ſphæra LMN ad ABC ſphæram, ita ſphæra DEF ad ſphæram quandam minorem ipſa ABC, quoniam ſphæra LMN major eſt ipſa DEF. ergo & DEF ſphæra ad ſphæram minorem ipſa ABC triplicatam proportionem habet ejus, quam EF ad BC; quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ABC ſphæra ad ſphæram majorem ipſa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. oſtenſum autem eſt neque ad minorem. ergo ABC ſphæra ad ſphæram DEF triplicatam proportionem habebit ejus, quam BC ad EF. Quod demonſtrare oportebat.

FINIS.

BRITISH MUSEUM 18 68 JUL

BOOKS *Printed and Sold by* Richard Clements *Bookſeller in* Oxford.

1 FOUR Sermons, by the Rev. George Fothergill, B.D. Fellow of Queen's College, Oxon. on publick occaſions, preach'd at Oxford: 1 At the Aſſizes held there, March 6. 1734-5. 2 On the Martyrdom of K. Charles I. 1744-5. 3 On a General Faſt-Day, Jan. 9. 1744-5. 4 And on the General Thankſgiving, Oct. 9. 1746.

2 The Four Goſpels in the Malayan Tongue, with a Preface, &c. by Dr Hyde.

3 Rogeri Aſchami Epiſtolarum, Libri Quatuor. Acceſſit Joannis Sturmii, aliorumque ad Aſchamum, angloſque alios eruditos Epiſtolarum Liber unus. 8vo.

4 Gloſſarium Antiquitatum Britannicarum, ſive Syllabus Etymologicus Antiquitatum veteris Britanniæ atque Iberniæ, Temporibus Romanorum Auctore Willielmo Baxter.

5 Inſtitutio Logicæ ad Communes Uſus accommodata, per Johannem Wallis, S.T.D. Geometriæ Profeſſorem Savilianum. Oxoniæ Editio Quinta, auctior & emendatior. 8vo.

6 De Antiquitate, Elegantia, Utilitate Linguæ Arabicæ, Oratio habita Oxonii, in Schola Linguarum VII Kalend. Auguſti, 1738. A Thoma Hunt, D.D. ex Aula Cervina, Linguæ Arabicæ Profeſſore.

7 A Diſſertation on Proverbs VII. 22, 23. being a Specimen of Critical Diſſertations on the Proverbs of Solomon: Addreſs'd to the Students in Arabic, and the other Oriental Languages, in the Univerſity of Oxford. By Thomas Hunt, D.D. of Hertford College, Profeſſor of Arabic. Price 6d.

8 Two Sermons preach'd before the Univerſity of Oxford. By Thomas Hutchinſon, D.D. of Hertford College, and Prebendary of Chicheſter.

9 Job's Expectations of a Reſurrection conſider'd. In Three Sermons preach'd before the Univerſity of Oxford. By Richard Brown, B. D. Fellow of Trinity College.

10 The Caſe of Naaman conſidered. A Sermon preach'd before the Univerſity of Oxford, by Richard Brown, B. D. Fellow of Trinity College.

11 Theodoſii Sphæricorum libri tres, Græce & Latine. Cura Joſ. Hunt è Coll. Bal.

12 The true Intellectual Syſtem of the Univerſe, by Ralph Cudworth, D. D. 2 vol. 4to.

13 Two

13 Two Diſſertations: the firſt, on The Tree of Life in Paradiſe, with Obſervations on the Fall of Man; the ſecond, on the Oblations of Cain and Abel. By Benjamin Kennicott, of Wadham College in Oxford. 8vo.

14 Caſpari Bartholini. Thom. S. Specimen Philoſophiæ Naturalis, præcipua Phyſices Capita exponens, in gratiam Juventutis Academicæ. Accedit de Fontium Fluviorumque Origine ex pluviis Diſſertatio Phyſica. 12°. Oxon. 1713.

15 The Works of the late Right Reverend and Learned Dr Francis Hare, 4 vol. 8vo.

16 Ariſtotelis de Rhetorica ſeu Arte Dicendi Libri Tres, Gr. Lat. Cantab. 1728.

17 Dionyſii Halicarnaſſei de Structura Orationis Liber. Ex Recenſione Jacobi Upton. Gr. & Lat. 8vo.

18 Flavii Joſephi Opera, quæ reperiri potuerunt, omnia. Cum Notis Johann. Hudſon. Gr. Lat. 2 vol. fol.

19 Euſebius: or the True Chriſtian's Defence againſt a late Book entitul'd The Moral Philoſopher. By John Chapman, D.D. 2 vol. 8vo.

20 Epicteti quæ ſuperſunt Diſſertationes ab Arriano Collectæ, nec non Enchiridion & Fragmenta, Græce & Latine, in duos Tomos diſtributa. Cum integris Jacobi Schegkii & Hieronymi Wolffii ſelectiſque aliorum Doctorum Annotationibus. Recenſuit, notis & Indice illuſtravit Joannes Uptonus. Præbend. Roffenſis, 2 vol. 4to.

21 Pope's Homer's Iliad, 6 vol. fol.

22 Pope's Homer's Odyſſey, 5 vol. fol.

23 Grammatica Rationis ſive Inſtitutiones Logicæ. 12°. Oxonii, è Theatro Sheldoniano.

24 Synopſis Metaphyſicæ Andreæ Fromenii, Editio ultima, Oxon.

25 Synopſis Communium Locorum, præcipuæ ad mores ſpectantium: ex poetis Latinis tum antiquioribus tum recentioribus collecta: & in capita cuique propria digeſta. Editio quinta accuratius recognita & caſtigata, 12mo.

26 Bibliotheca Biblica: Being a Commentary upon all the Books of the Old and New Teſtament, 5 vol. 4to. containing the 5 Books of Moſes, 5 vol. 4to.

27 Logicæ Artis Compendium. Authore Roberto Sanderſono, Epiſc. Lincoln. 12mo.

TRIGONOMETRIÆ

Planæ & Sphæricæ

ELEMENTA.

ITEM

DE NATURA

ET

ARITHMETICA

LOGARITHMORUM

TRACTATUS BREVIS.

OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO MDCCXLVII.

Impensis *Ric. Clements* Bibliop. *Oxonienſis.*

BRITISH MUSEUM
JUL
69

TRIGONOMETRIÆ
Planæ & Sphæricæ
ELEMENTA.

DEFINITIONES.

EX datis Trianguli lateribus angulos, & ex angulis latera laterumve rationes, & mixtim aſſequi, Trigonometriæ munus eſt. Ad quod præſtandum, neceſſe eſt, ut non tantum Peripheriæ circulares, ſed & rectæ lineæ circulis adſcriptæ, in notas aliquot & certas partes ſecari ſupponantur.

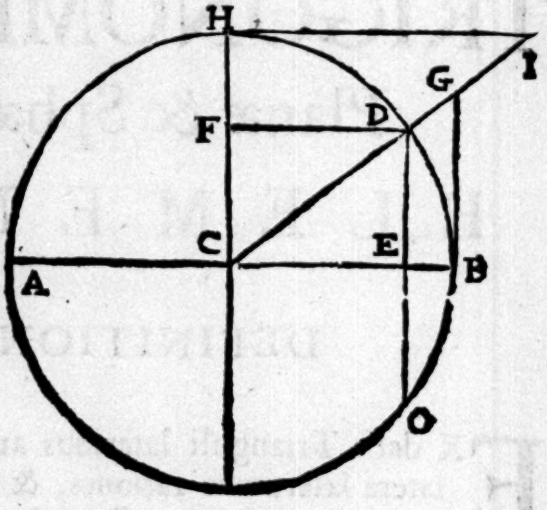
Placuit itaque Veteribus Mathematicis, peripheriam circuli in 360 partes (quos gradus appellant) dividere; & unumquemque gradum in 60 minuta prima, & hæc ſingula in 60 ſecunda, & rurſus horum unumquodque in 60 minuta Tertia, & ita continuo partiri. Et angulus quilibet dicitur eſſe tot graduum & minutorum, quot ſunt in arcu qui angulum illum metitur.

Quidam gradum in partes centeſimas, potius quam ſexageſimas partiri volunt: & utilius fortaſſe eſſet, non gradus ſed & ipſum circulum in decupla ratione ſecare; quæ diviſio forſan aliquando obtinebit. Verum ſi circulus conſtet 360 gradibus, ejus quadrans quæ eſt menſura anguli recti, erit harum partium 90. Si circulus in 100 partes ſecetur, Quadrans erit 25 partium.

Complementum Arcus, eſt differentia ejus à Quadrante.

Chorda ſive *ſubtenſa* eſt recta linea ab uno Arcûs termino ad alterum ducta.

Sinus rectus alicujus arcus qui & ſimpliciter ſinus dici ſolet, eſt perpendicularis cadens ab uno arcus termino ad radium per alterum terminum ejuſdem Arcus ductum. Eſt igitur ſemiſubtenſa dupli Arcus; ſcil. eſt DE = ½ DO, & eſt arcus DO duplus ipſius DB. Hinc ſinus arcus 30. gr. æqualis eſt dimidio radii, nam per 15 El. 4. Latus Hexagoni circulo inſcripti, hoc eſt, ſubtenſa 60 gr. æqualis eſt radio. Sinus dividit Radium in duo ſegmenta CE EB; quorum unum CE quod centro & ſinu recto intercipitur, eſt ſinus complementi arcûs DB ad quadrantem (nam eſt CE = FD qui eſt ſinus arcus DH) & vocatur *Coſinus*. Alterum ſegmentum EB quod ſinu recto & peripheria intercipitur, vocatur *Sinus verſus*: aliquando dicitur Arcûs *Sagitta*.



Quod ſi per unum Arcus terminum D producatur à centro recta CG, donec occurrat rectæ BG ſuper diametro ad ejus terminum B perpendiculari; vocabitur in Trigonometria CG *Secans*, & BG *Tangens* arcus DB.

Coſecans & Cotangens Arcûs eſt ſecans vel tangens Arcus, qui eſt complementum alterius ad Quadrantem. *Nota.* Sicut eadem eſt Chorda Arcûs & ejuſdem complementi ad circulum. Sic idem eſt Sinus, eadem Tangens, eademque Secans Arcûs & ejuſdem complementi ad ſemicirculum.

Sinus Totus eſt ſinus maximus, ſeu ſinus 90 graduum qui circuli radio æqualis eſt.

Canon Trigonometricus eſt Tabula, quæ à minuto incipiens, ſeriatim exhibet quas habent longitudines ſinguli Sinus Tangentes & Secantes, reſpectu radii, qui unitatis loco

BRITISH MUSEUM 15 69 JUL

loco ponitur, & in partes 10 000 000 vel plures decimales dividi intelligitur. Adeo ut ope hujus Tabulæ, cujuſlibet Arcûs vel anguli Sinus Tangens vel Secans haberi poteſt; Et viciſſim ex dato Sinu Tangente vel Secante dabitur qui iis reſpondet arcus vel angulus. Obſervandum eſt in ſequentibus R eſſe notam Radii, S notam ſinus, coS coſinus, T notam Tangentis, & coT coTangentis.

CONSTRUCTIO CANONIS.

PROP. I. THEOREMA.

Datis duobus quibuſlibet Trianguli rectanguli lateribus, reliquum quoque dabitur.

Vide figuram propoſitionis tertiæ.

Eſt enim per 47 Elementi primi $AC\,q = AB\,q + BC\,q$ & $AC\,q - BC\,q = AB\,q$, & viciſſim $AC\,q - AB\,q = BC\,q$. unde per extractionem Radicis quadratæ, dabitur $AC = \sqrt{AB\,q + BC\,q}$ & $AB = \sqrt{AC\,q - BC\,q}$. & $BC = \sqrt{AC\,q - AB\,q}$.

PROP. II. PROBL.

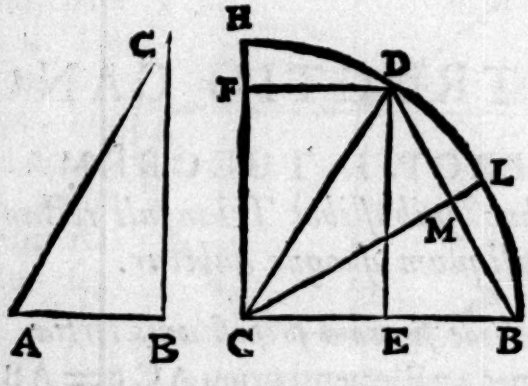
Dato DE ſinu arcus DB. Invenire Coſinum DF.

Ex datis CD radio & DE ſinu, in Triangulo rectangulo CDE dabitur per præcedentem $CE = \sqrt{CD\,q - DE\,q} = DF$

PROP. III. PROBL.

Dato DE ſinu arcus cujuſvis DB. Invenire DM vel BM ſinum arcus dimidii.

Dato DE dabitur per præcedentem CE, ac proinde EB quæ eſt differentia inter coſinum & Radium. In Tri-



angulo igitur rectangulo DBE datis DE & EB dabitur DB cujus ſemiſſis DM eſt ſinus arcus DL = ½ arcus DB.

PROP. IV. PROBL.

Dato BM ſinu arcus BL invenire ſinum dupli Arcus.

Dato BM ſinu, dabitur per Prop. 2. coſinus CM. Sunt autem Triangula CBM DBE æquiangula, ob angulos ad E & M rectos & angulum ad B communem, quare (per 4. 6.) erit CB : CM : : BD vel 2 BM : DE. Unde cum dantur tres priores hujus Analogiæ termini, quartus quoque qui eſt ſinus arcus DB innoteſcet.

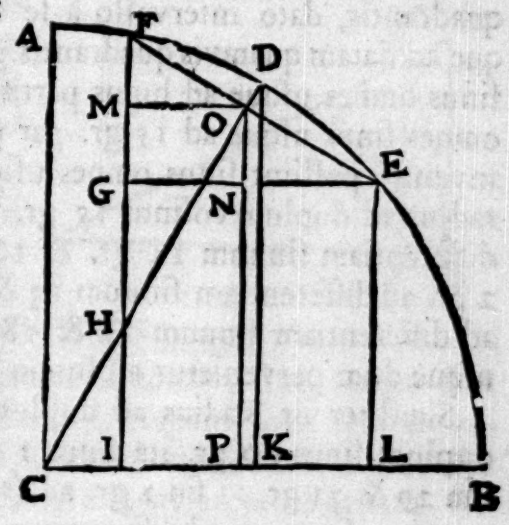
Corol. Et CB : 2 CM : : BD : 2 DE, hoc eſt, Radius ad duplum coſinus arcus ½ DB ut ſubtenſa arcus DB ad ſubtenſam dupli arcus. Item eſt CB : 2 CM : : (2 BM : 2 DE : :) BM : DE : : ½ CB : CM. unde dato ſinu arcus alicujus & ſinu arcus dupli, dabitur coſinus arcus ſimpli.

PROP.

PROP. V.

Datis ſinubus duorum arcuum BD FD, Invenire FI ſinum ſummæ arcuum, Item EL ſinum differentiæ eorundem.

Ducatur Radius CD, & ſit CO coſinus arcus FD, qui proinde dabitur; per O agatur OP parallela ad DK. Item ducantur OM GE parallelæ ad CB. Et ob æquiangula triangula CDK COP CHI FOH FOM. Eſt primò CD : DK : : CO : OP, quæ itaque innoteſcet. Item eſt CD : CK : : FO : FM, adeoque & illa nota erit. ſed ob FO = EO erit FM = MG = ON. Eſt itaque OP + FM = FI = ſinui ſummæ arcuum : & OP − FM, hoc eſt, OP − ON = EL ſinui differentiæ arcuum. Q. E. I.



Coroll. Quia arcuum BE BD BF differentiæ ſunt æquales, Erit BD arcus medius arithmeticus inter arcus BE BF.

PROP. VI.

Iiſdem poſitis, Radius eſt ad duplum coſinus arcus medii, ut ſinus differentiæ ad differentiam ſinuum extremorum.

Nam eſt CD : CK : : FO : FM, unde duplicando conſequentes CD : 2 CK : : FO : 2 FM vel ad FG; quæ eſt differentia ſinuum EL FI. Q. E. D.

Cor. 1. Si arcus BD ſit 60 grad. Erit differentia ſinuum FI EL æqualis FO ſinui diſtantiæ. Nam in eo caſu ſit CK ſinus 30 grad. cujus duplum æquale eſt radio,

adeoque ob CD = 2 CK erit FO = FG. Adeoque ſi duo arcus BE, BF ab arcu 60 gr. æquidiſtent, erit differentia ſinuum æqualis ſinui diſtantiæ FD.

Cor. 2. Hinc ſi dentur ſinus omnium arcuum, dato intervallo à ſe invicem diſtantium ab initio quadranti. uſque ad 60 gradus, facile inveniuntur reliqui per unicam additionem. Eſt enim ſinus 61 gr. = ſinui 59 gr. + ſin 1 gr. & ſinus 62 gr. = ſinui 58 gr. + ſin 2 gr. Item ſinus 63 gr. = ſinui 57 gr. + ſin 3 gr. & ita deinceps.

Cor. 3. Si habeantur ſinus omnium arcuum ab initio quadrantis, dato intervallo à ſe invicem diſtantium, uſque ad datam quamvis quadrantis partem, dabuntur exinde ſinus omnes uſque ad hujus partis duplum *ex. g.* Dentur omnes ſinus uſque ad 15 gr. per præcedentem Analogiam inveniri poſſunt ſinus omnes uſque ad 30 gr. Nam eſt radius ad duplum coſinus 15 gr. ut ſinus unius gradus ad differentiam ſinuum 14 gr. & 16 gr. ita etiam eſt ſinus 2 gr. ad differentiam ſinuum 13 & 17 gr. & ita ſinus 3 gr. ad differentiam ſinuum 12 & 18 gr. atque ſic continuo uſque dum pervenietur ad ſinum 30 gr.

Similiter ut Radius ad duplum coſinus 30 gr. ſeu ad duplum ſinus 60 gr. ita ſinus 1 gr. ad differentiam ſinuum 29 & 31 gr. : : ſin 2 gr. ad Differentiam ſinuum 28 & 32 gr. : : ſin 3 gr. ad differentiam ſinuum 27 & 33 gr. ſed in hoc caſu eſt [a] Radius ad duplum coſinus 30 gr. ut 1 ad $\sqrt{3}$. ac proinde ſi multiplicentur ſinus diſtantiarum ab arcu 30 gr. per $\sqrt{3}$ dabuntur differentiæ ſinuum.

Similiter in ipſo initio quadrantis minutim exquirere poſſumus ſinus, datis ſinubus & coſinubus unius & duorum minutorum. Nam ut Radius ad duplum coſinus 2′ : : ſin 1′ : differentiam ſinuum 1′ & 3′ : : Sin 2′ : differentiam ſinuum 0′ & 4′ hoc eſt, ad ipſum ſinum 4′. Et

---

[a] Sit DB Arcus 30 gr. CD = Rad. = 1 erit duplum DK = $\frac{1}{2}$. Deinde $\sqrt{CDq - DKq} = CK = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Sed (per 14^tam 5^ti) CD : CK : : 1 : $\sqrt{\frac{3}{4}}$. & duplicando conſequentes CD (Rad.) : 2 CK (dupl. Coſ. 30 gr.) : : 1 : 2 $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$.

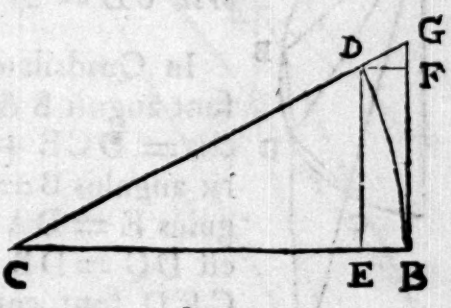
ſimiliter

ſimiliter ex datis ſinubus priorum 4′ inveniuntur ſinus reliqui uſque ad 8′ & exinde ad 16′ & ita deinceps.

PROP. VII. THEOREMA.

In arcubus exiguis Sinus & Tangens ejuſdem arcus ſunt quam proxime ad ſe invicem, in ratione æqualitatis.

Nam ob æquiangula triangula CED CBG, erit CE : CB :: ED : BG. ſed accedente puncto D ad B, evaneſcit EB reſpectu arcus BD : unde fit CE fere æqualis CB. adeoque & ED fere æqualis BG. Si EB ſit minor radii parte $\frac{1}{10\,000\,000}$ erit differentia inter ſinum & tangentem, minor quoque tangentis parte $\frac{1}{10\,000\,000}$.



Cor. Cum Arcus ſit tangente minor, ſinu autem ſuo major; & exigui arcus ſinus & tangens ſunt fere æquales, erit etiam arcus ſuo ſinui vel tangenti fere æqualis, Adeoque in exiguis arcubus, erit ut arcus ad arcum ita ſinus ad ſinum.

PROP. VIII.

Invenire ſinum Arcus unius minuti.

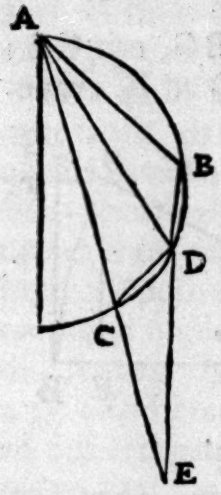
Latus Hexagoni circulo inſcripti, hoc eſt, ſubtenſa 60 graduum æqualis eſt Radio, (*per* 15^tam 4^ti.) Radii itaque ſemiſſis erit ſinus Arcus 30 gr. Dato itaque ſinu Arcus 30 grad. invenitur ſinus arcus 15 gr., (*per* 3^tiam hujus.) Item ex dato ſinu 15 gr. per eandem invenitur ſinus 7 gr. 30 min. & ſinus hujus dimidii 3 gr. 45′ ſimiliter invenitur; & ita deinceps, donec duodecima peracta biſectione, perveniatur ad arcum 52″ 44‴ 3⁗ 45⁗′ cujus coſinus fere æqualis eſt radio, in quo caſu (uti conſtat ex prop. 7.) ſunt ſinus arcubus ſuis proportionales; adeoque ut arcus 52″ 44‴. 3⁗. 45⁗′ ad arcum unius minuti ita erit

erit ſinus prius inventus ad ſinum arcus unius minuti, qui igitur dabitur.

Dato ſinu unius minuti, invenietur per prop. 2. & 4, ſinus duorum minutorum ejuſque coſinus.

PROP. IX. THEOREMA.

Si angulus BAC in peripheria circuli exiſtens, biſecetur rectâ AD, Et producatur AC quoad DE = AD ipſi occurrat in E: erit CE = AB.



In Quadrilatero ABDC (per 22. 3.) ſunt anguli B & ACD æquales duobus rectis = DCE + DCA (per 13. 1.) unde erit angulus B = DCE. Quin etiam eſt angulus E = DAC (per 5. 1.) = DAB & eſt DC = DB. quare Triangula BAD & CED ſunt congrua & CE eſt æqualis AB. Q. E. D.

PROP. X. THEOREMA.

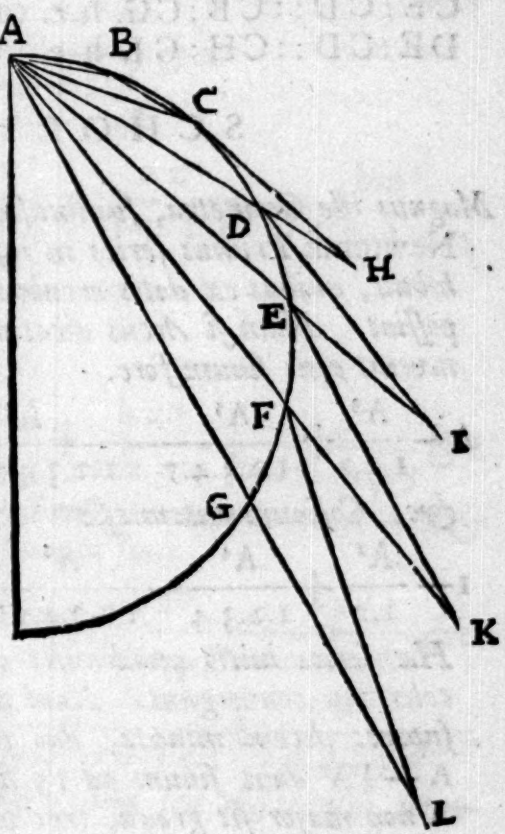
Sint arcus AB BC CD DE EF &c. æquales; Arcuumque AB AC AD AE &c. ſubtenſæ ducantur, erit AB : AC : : AC : AB + AD : : AD : AC + AE : : AE : AD + AF : : AF : AE + AG.

Producantur AD in H, AE in I, AF in K, & AG in L, ut triangula ACH ADI AEK AFL ſint Iſoſcelia. Et quoniam angulus BAD biſectus eſt, fiet DH = AB per precedentem. Smiliter erit EI = AC, FK = AD, item GL = AE.

Sed Triangula Iſoſcelia ABC CAH DAI EAK FAL, ob angulos ad baſes æquales, ſunt æquiangula. Quare erit ut AB : AC : : AC : AH = AB + AD : : AD : AI = AC + AE : : AE : AK = AD + AF : : AF : AL = AE + AG. Q. E. D.

Corol.

Corol. Quoniam eſt AB ad AC ut Radius ad duplum cosinus Arcus ½ AB, (per corol. prop. 4.) erit quoque ut Radius ad duplum cosinus arcus ½ AB ita ½ AB : ½ AC :: ½ AC : ½ AB + ½AD :: ½ AD : ½ AC + ½AE :: ½ AE : ½ AD + ½AF &c. Sint jam arcus AB BC CD &c. ſinguli 2′. Erit ½ AB ſinus unius minuti, ½ AC ſinus 2′. ½ AD ſinus 3′ ½ AF ſinus 4′ &c. Unde datis ſinubus unius & duorum minutorum ſinus omnes reliqui ſic facillime habentur.



Dicatur cosinus arcus unius minuti, hoc eſt, ſinus arcus 89 gr. 59′, Q; & fient ſequentes Analogiæ, R : 2 Q :: Sin 2′ : S 1′ + S 3′. quare dabitur ſinus 3′. Item R : 2 Q : : S. 3′ : S. 2′ + S. 4. quare dabitur S 4′.

Item R : 2 Q : : S. 4′ : S. 3′ + S. 5′. quare habetur ſinus 5′.

R : 2 Q : : S. 5′ : S 4′ + S 6′ proinde dabitur S 6′. Atque ita deinceps ad ſingula quadrantis minuta dabuntur ſinus. Et quoniam Radius ſeu primus Analogiæ terminus eſt Unitas; operationes per multiplicationem contractam & ſubductionem facillime expediuntur.

Inventis ſinubus, uſque ad gradum ſexageſimum. Reliqui ſinus per ſolam additionem habentur (per cor. 2. pr. 6.)

Datis ſinubus, Tangentes & ſecantes ex Analogiis ſequentibus inveniri poſſunt. In fig. Definitionum) ob æquiangula Triangula CED CBG CHI.

CE:

CE : ED : : CB : BG. hoc est, coS : S : : R : T.
GB : BC : : CH : HI. h. e. T : R : : R : coT.
CE : CD : : CB : CG. h. e. coS : R : : R : Secant.
DE : CD : : CH : CI. h. e. S : R : : R : co Secant.

SCHOLIUM.

Magnus ille Geometra, ſummuſque Philoſophus Dominus Newtonus *Primus ſeries in infinitum convergentes exhibuit, quibus ex datis arcubus, eorum ſinus computari poſſint. Nam ſi Arcus dicatur* A *& Radius ſit unitas invenit ejus ſinum fore.*

$$A - \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^5}{1.2.3.4.5} - \frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{A^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

&c. Coſinum autem eſſe

$$1 - \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^4}{1.2.3.4} - \frac{A^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{A^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \text{ \&c.}$$

Hæ ſeries initio quadrantis cum Arcus A *parvus eſt celerrime convergunt. Nam in ſerie pro ſinu, ſi* A *non ſuperet decem minuta, duo primi ejus termini ſcil.* $A - \frac{1}{6} A^3$ *dant ſinum ad* 15 *figuararum loca, ſi Arcus* A *non major ſit gradu, tres primi exhibent ſinum ad totidem loca, adeoque pro primis & ultimis Quadrantis ſinubus hæ ſeries ſunt admodum utiles. ſed quo major ſit arus* A, *eo pluribus opus eſt terminis ut inveniatur ſinus in numeris qui ſunt veri ad datum figurarum locum. Tandem antem lentiſſime convergunt ſeries cum Arcus fere æqualis eſt Radio. Cui rei ut remedium adferatur, ego alias excogitavi ſeries* Newtonianis *ſimiles, in quibus ſuppono arcum cujus ſinus quæritur eſſe ſummam vel differentiam duorum arcuum ſcil. eſſe* A + z *vel* A — z : *notoſque eſſe ſinum & coſinum arcus* A. *ſcil. ſit* a *ſinus arus* A *&* b *ejus coſinus. Sinus Arcus* A + z *per hanc ſeriem exprimetur*

$$1.\ a + \frac{b\,z}{1} - \frac{a\,z^2}{1.2} - \frac{b\,z^3}{1.2.3} + \frac{a\,z^4}{1.2.3.4} + \frac{b\,z^5}{1.2.3.4.5} \text{ \&c.}$$

Ejus

2. *Ejus Cosinus* $b - \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2} + \frac{az^3}{1.2.3} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} - \frac{az^5}{1.2.3.4.5} - \frac{bz^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Similiter sinus Arcus A — z *est*

3. $a - \frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} + \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} - \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.45.6}$ &c.

Et cosinus est

4. $b + \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2.} - \frac{az^3}{1.2.3} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{az^5}{1.2.3.4.5}$ &c.

Arcus A *est medius Arithmeticus inter arcus* A — z & A + z. *Differentiæ sinuum sunt*

5. $\frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

6. $\frac{bz}{1} + \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} - \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} + \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Unde differentiarum differentia seu differentia secunda

7. *Prodit* $\frac{2az^2}{1.2} - \frac{2az^4}{1.2.3.4} + \frac{2az^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Seu $2ax \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Quæ series æqualis est duplo sinus arcus medii ducto in sinum versum arcus z & *celerrime convergit. Adeo ut si* z *sit minutum primum, terminus seriei primus dat differentiam secundam ad* 15 *figurarum loca; secundus autem terminus ad* 25 *loca.*

Hinc datis sinubus duorum quorumvis arcuum intervallo minuti distantium, facili admodum operatione inveniri possint sinus reliquorum omnium arcuum qui sunt in eadem progressione.

In

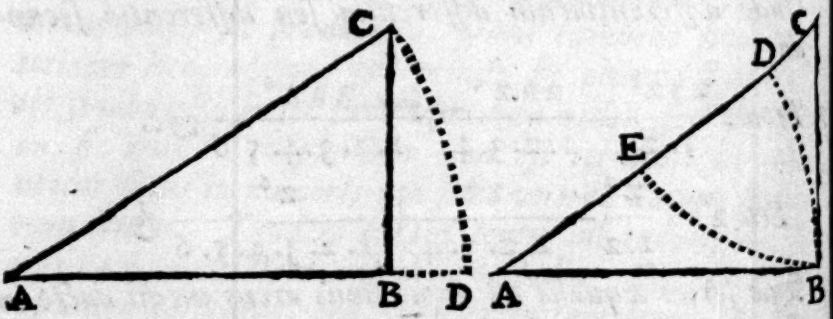
In ſerie prima & ſecunda ſi Arcus A *ſit* = 0, *erit* a = 0 *&* b *ejus coſinus ſit radius ſeu* 1. *& hinc deſtructis terminis ubi eſt* a *&* pro b *poſito* 1 *ſeries deveniunt* Newtonianæ. *In ſerie tertia & quarta. ſi* A *ſit* 90 gr. *fiet* b = 0 *&* a = 1 *unde quoque deſtructis terminis ubi eſt* b *&* pro a *poſito* 1 *rurſus prodibunt ſeries* Newtonianæ.

Omnes hæ ſeries ex Newtonianis *facile fluunt per prop.* 5. *hujus.*

PROP. XI.

In Triangulo Rectangulo, ſi Hypotenuſa ſit Radius, latera ſunt ſinus angulorum oppoſitorum; ſi vero crus alterum fiat Radius, crus reliquum eſt Tangens anguli oppoſiti, & Hypotenuſa eſt anguli ſecans.

Manifeſtum eſt CB eſſe ſinum arcus CD, ejuſque coſinum eſſe AB, ſed arcus CD eſt menſura anguli A, & complementum menſuræ anguli C. Præterea in ſecunda figura poſito AB radio, eſt BC, Tangens & AC ſecans ar-



cus BD, qui eſt menſura anguli A, & ſimiliter in eadem figura poſito BC radio, eſt BA Tangens & AC ſecans arcus BE vel anguli C. Q. E. D.

Eſt igitur, ut AC ſecundum datam quamvis menſuram æſtimata ad BC in eadem menſura æſtimatam, ita erit 10000000 numerus partium in quas dividi ſupponitur Radius, ad numerum qui exprimit in iiſdem partibus longitudinem quam habet ſinus anguli A, hoc eſt,

Erit

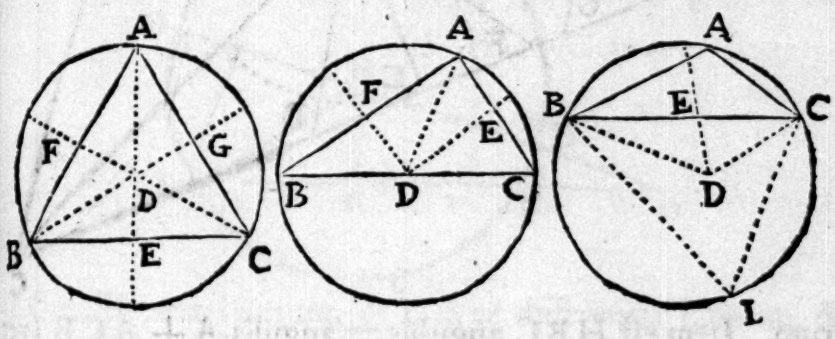
Erit AC : BC : : R : S, A
Simili ratione erit AC : BA : : R : S, C
Item AB : BC : : R : T, A
Et BC : BA : : R : T, C

In his itaque proportionalibus ſi dantur tres quælibet, per Regulam Trium invenietur quarta.

PROP. XII.

Trianguli plani latera ſunt ut ſinus angulorum oppoſitorum.

Trianguli circulo inſcripti latera perpendicularibus radiis biſecentur. Et erunt ſemilatera ſinus angulorum ad peripheriam. Eſt enim angulus BDC ad centrum du-



plex anguli BAC ad peripheriam (per 20. El. 3.) cujus itaque dimidium ſc. BDE æquale eſt BAC, atque ejus ſinus eſt BE. Eadem ratione erit BF ſinus anguli BCA. Et AG erit ſinus anguli ABC.

In Triangulo rectangulo eſt BD = ½ BC = Radio (per 31. El. 3.) ſed Radius eſt ſinus anguli recti unde ½ BC eſt ſinus anguli A.

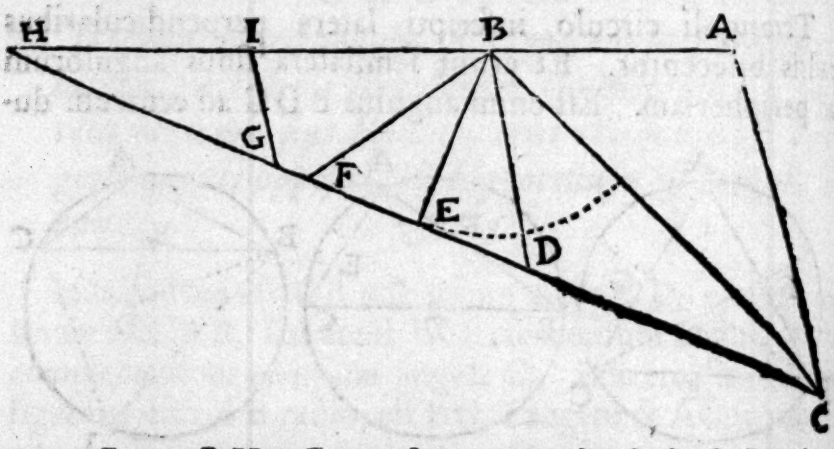
In Triangulo Amblygonio, ductis BL CL, erit angulus L complementum anguli A ad duos rectos (per 22. El. 3.) ac proinde idem erit utriuſque anguli ſinus. Eſt autem BDE (cujus ſinus eſt BE) = angulo L. quare erit & BE ſinus anguli BAC. Sunt itaque in omni triangulo ſemiſſes laterum ſinus angulorum oppoſitorum, manifeſtum autem eſt latera eſſe inter ſe ut ipſorum ſemiſſes. Q. E. D.

PROP.

PROP. XIII.

In Triangulo Plano ſumma Crurum, Differentia Crurum, Tangens ſemiſummæ angulorum ad baſim, & Tangens ſemidifferentiæ eorundem ſunt proportionales.

Sit Triangulum ABC cujus crura AB BC & Baſis AC. producatur AB ad H ut ſit BH = BC. erit AH ſumma crurum; fiat BI = BA, & erit IH differentia cru-



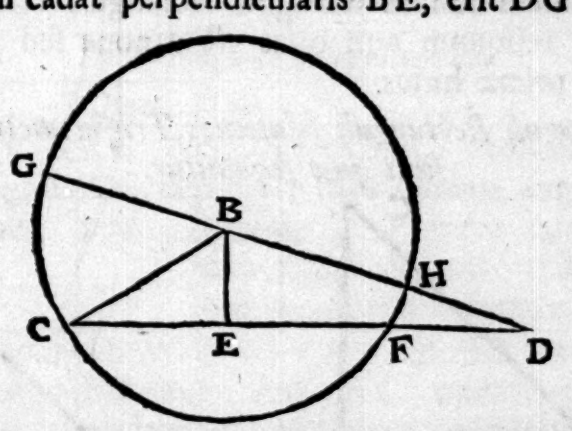
rum. Item eſt HBC angulus = angulis A + ACB (per 32. El. 1.) cujus itaque dimidium EBC = ſemiſummæ angulorum A & ACB, ejuſque Tangens (poſito Radio = EB) eſt EC. Ducatur BD ad AC parallela, fiatque HF = CD. Et ob HB = CB erit (per 4. El. 1.) angulus HBF = CBD = BCA (per 29. El. 1.) Eſt etiam angulus HBD = angulo A. unde erit FBD differentia angulorum A & ACB: Et EBD eorum ſemidifferentia, cujus tangens eſt ED. per I ducatur IG parallela ad AC vel BD & fiet (per 2. El. 6.) AB : BI :: CD : DG. At eſt AB = BI, unde erit & CD = DG. at eſt CD = HF, unde HF = DG & proinde HG = DF & ½HG = ½DF = DE. Et quia triangula AHC IHG ſunt æquiangula, erit AH : IH :: HC : HG :: ½HC : ½HG :: EC : ED. hoc eſt, erit AH ſumma crurum ad IH differentiam crurum, ut EC Tangens ſemiſſis ſummæ angulorum

angulorum ad Baſim, ad E D Tangentem ſemiſſis differentiæ eorundem. Q. E. D.

PROP. XIV.

In Triangulo Plano, Baſis, ſumma laterum, Differentia laterum, Differentia ſegmentorum baſis ſunt proportionales.

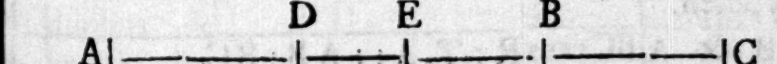
Trianguli B C D baſis eſto D C, centro B radio B C deſcribatur circulus, & producatur D B in G, ex puncto B in baſim cadat perpendicularis B E, erit D G = D B +



B C = ſummæ laterum, & D H = differentiæ laterum, & ſegmenta baſis ſunt D E C E quorum differentia eſt D F. Quoniam (per cor. prop. 36. El. 3.) rectangulum ſub D C D F æquale eſt rectangulo ſub D G D H, erit (per 16. El. 6.) D C : D G : : D H : D F.

PROBLEMA.

Datis duarum quarumvis quantitatum ſumma & differentia, ipſas quantitates invenire.



Si ad ſemiſummam addatur ſemidifferentia, aggregatum erit æquale majori; ſi autem à ſemiſummâ ſubducatur ſemidifferentia, reſiduum erit æquale minori. Sint enim A B B C duæ quantitates; & capiatur A D = B C. Fiet D B differentia. Quarum ſumma eſt A C, quæ biſecta in

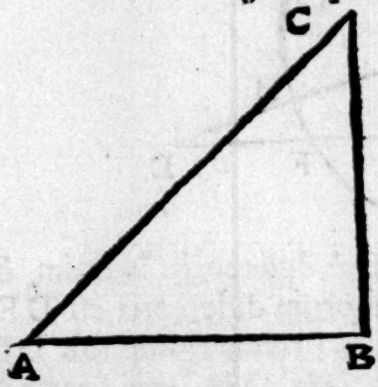
E dat AE vel EC ſemiſummam & DE vel EB ſemidifferentiam. Porro eſt AB = AE + EB = ſemiſummæ + ſemidifferentia, & BC = CE — EB = ſemiſummæ — ſemidifferentia.

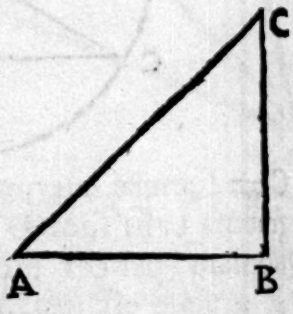
IN quovis Triangulo plano datis duobus angulis, datur tertius qui eſt ſummæ duorum reliquorum complementum ad duos rectos.

In Triangulo autem rectangulo dato alterutro angulo acuto, datur reliquus, qui eſt dati complementum ad rectum.

Datis autem duobus trianguli rectanguli lateribus, ut inveniatur reliquum non opus eſt canone ſed perficitur ope prop. primæ hujus.

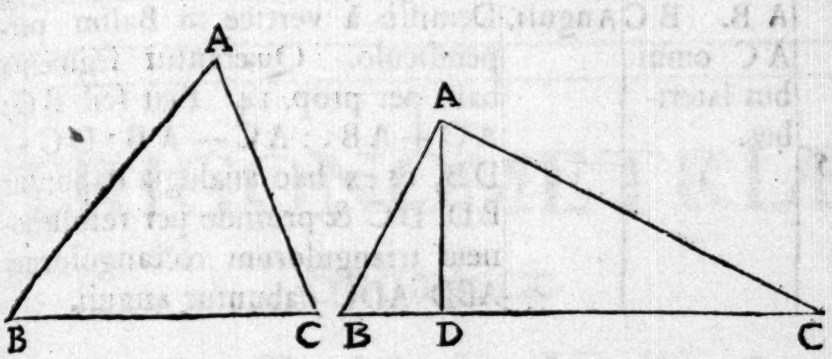
Trianguli Rectanguli ſolutiones Trigonometricæ ſunt quæ ſequuntur.





	Datis.	Quær.	Fiat.
1	AB BC cruribus,	Anguli.	AB : BC : : R : T anguli A. Cujus complementum eſt Angulus C.
2	AB AC crure & Hypoten.	Anguli.	AC : AB : : R : S, C cujus complementum eſt angulus A.
3	AB & A crure & angulo.	BC crus alterum	R : T, A : : AB : BC.
4	AB & C crure & angulo.	AC Hypotenuſa.	S, C : R : : AB : AC.

In



In Triangulis obliquangulis.

	Datis.	Quær.	Fiat.
1	A. B. C & AB angulis & latere.	BC & AC latera.	S,C:S,A::AB:BC. Item S,C:S,B::AB:AC; datis duobus angulis datur tertius, unde caſus cum dentur duo anguli & latus; reliqua quærantur, recidit in hunc caſum.
2	A.B.C. omnibus angulis.	AB. AC. BC omnia latera.	S, C : S, A : : AB : BC. Et S, C : S, B : : AB : AC. unde datis angulis invenire licet proportiones laterum, at non ipſa latera, niſi ipſorum unum prius innoteſcat.
3	AB. BC, &C duobus lateribus & angulo uni oppoſito.	A & B anguli.	AB: BC : : S, C : S, A, qui proinde inveniatur. Sed quia idem eſt ſinus anguli & ejus complementi ad duos rectos, prænoſcenda eſt anguli A Species.
4	AB BC & B. lateribus duobus & angulo interjecto.	Anguli. A & C.	BC + AB : BC — AB : : T, $\frac{A+C}{2}$: T, $\frac{A-C}{2}$ unde datur differentia angulorum A & C quorum ſumma quoque eſt nota; & proinde per *Problema poſt prop.* 14. dabuntur ipſi anguli.

	Datis.	Quær.	Fiat.
5	A B. B C A C omnibus lateribus.	Anguli.	Demisso à vertice in Basim perpendiculo. Quærantur segmenta basis per prop. 14. Fiat scil. BC: AC+AB:: AC—AB: DC—DB, & ex hac analogia dabuntur BD. DC. & proinde per resolutionem triangulorum rectangulorum ABD ADC dabuntur anguli.

TRIGONOMETRIÆ Sphæricæ ELEMENTA.

DEFINITIONES.

1. SPhæræ Poli, ſunt duo puncta in ſuperficie Sphæricâ, quæ ſunt Axis extrema.

2. Polus circuli in Sphæra, eſt punctum in ſuperficie Sphæræ, à quo omnes rectæ lineæ ad circuli circumferentiam tendentes, ſunt inter ſe æquales.

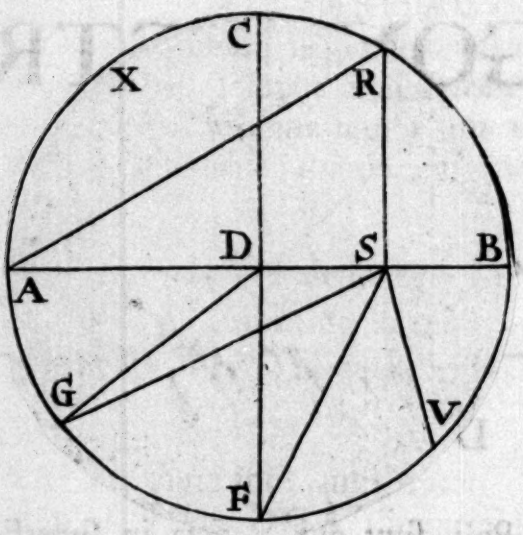
3. Circulus in ſphæra maximus eſt, cujus planum tranſit per ſphæræ centrum, & cujus centrum idem eſt cum centro Sphæræ.

4. Triangulum Sphæricum eſt figura comprehenſa ſub arcubus trium maximorum in Sphæra circulorum.

5. Angulus Sphæricus eſt is qui in ſuperficie ſphæricâ, continetur ſub duobus arcubus maximorum circulorum; qui æqualis eſt inclinationi planorum iſtorum circulorum.

PROP. I.

Circuli maximi ACB AFB ſe bifariam ſecant.



Cum enim circuli habent idem centrum, communis eorum ſectio erit utriuſque circuli diameter, quæ eos bifariam ſecabit.

Cor. Hinc in ſuperficie ſphæræ, duo maximorum circulorum Arcus ſemicirculis minores, ſpatium non comprehendunt, non enim poſſunt, niſi in duobus punctis ſemicirculo oppoſitis, ſibi invicem occurrere.

PROP. II.

Si à polo C circuli cujuſvis AFB, ducatur ad ejus centrum recta CD, ea ad planum iſtius circuli perpendicularis erit.

In circulo AFB ducantur diametri quævis EF GH; Et quoniam in triangulis CDF CDE, ſunt CD DF æquales CD DE, & baſis CF æqualis baſi CE (per def.2.) erit (per 8. El. 1.) angulus CDF = angulo CDE, ac proinde uterque rectus erit; ſimiliter demonſtrabitur, angulos

angulos CDG CDH esse rectos; unde (per 4. El. 11.) erit CD perpendicularis ad planum circuli AFE. Q.E.D.

Cor. 1. Circulus maximus distat à polo suo invervallo Quadrantis; nam ob angulos CDG CDF rectos, erunt ipsorum mensuræ, sc. arcus CG CF quadrantes.

Cor. 2. Circuli maximi per polum alterius circuli transeuntes cum ipso faciunt angulos rectos; & viciſſim, si cum altero circulo faciunt angulos rectos; transibunt per polum alterius istius circuli; nam per rectam DC eos transire necesse est.

PROP. III.

Si polo A describatur maximus circulus ECF, arcus CF interceptus inter AC AF, est mensura anguli CAF vel CDF.

Per *corol.* 1. præcedentis, sunt arcus AC AF quadrantes, ac proinde anguli ADC ADF sunt recti, quare (per defin. 6. El. 11.) angulus CDF (cujus mensura est arcus CF) æqualis est inclinationi planorum ACB AFB, æqualis quoque angulo Sphærico CAF vel CBF. Q.E.D.

Cor. 1. Si arcus AC AF sunt Quadrantes, erit A polus circuli per puncta C & F transeuntis, est enim AD ad planum FDC normalis, (per 4. El. 11.)

Cor. 2. Anguli ad verticem sunt æquales, uterque enim est æqualis inclinationi circulorum. Item anguli qui sunt deinceps sunt æquales duobus rectis.

PROP. IV.

Triangula erunt æqualia & congrua, si duo latera habeant duobus lateribus æqualia, & angulos æqualibus lateribus comprehensos etiam æquales.

PROP. V.

Item Triangula erunt æqualia & congrua, si latus cum angulis adjacentibus in uno triangulo sit æquale lateri cum angulis adjacentibus in altero triangulo.

PROP. VI.

Triangula æquilatera ſunt etiam æquiangula.

PROP. VII.

In Triangulis Iſoſcelibus, anguli ad baſim ſunt æquales.

PROP. VIII.

Si anguli ad baſim fuerint æquales, erit Triangulum Iſoſceles.

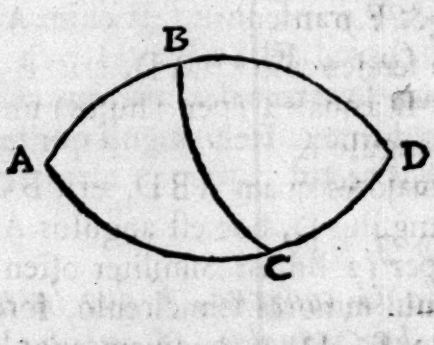
Eodem modo demonſtrantur quinque propoſitiones præcedentes ut in triangulis planis.

PROP. IX.

Quælibet duo trianguli latera reliquo ſunt majora.

Nam arcus circuli maximi, inter duo quælibet in ſuperficie ſphæræ puncta, eſt via breviſſima.

PROP. X.



Quodlibet trianguli latus minus eſt ſemicirculo.

Producantur trianguli ABC latera AC AB, donec conveniunt in D, erit arcus ACD ſemicirculus, qui major eſt quam AC.

PROP. XI.

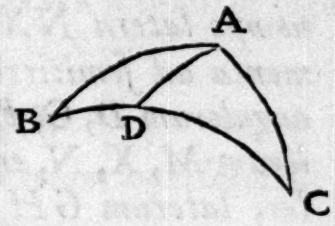
Trianguli latera ſunt circulo minora.

Eſt enim DB + DC major quam BC, (per prop. 9.) & utrinque addendo BA + AC, erit DBA + DCA, hoc eſt, circulus major quam AB + BC + AC, quæ ſunt tria latera trianguli ABC.

PROP.

PROP. XII.

In triangulo ABC, major angulus A majori lateri ſubtenditur.



Fiat angulus BAD = angulo B, & erit AD = BD (per 8. hujus) unde BDC = DA + DC, & hi arcus majores ſunt quam AC, eſt itaque latus BC, quod ſubtendit angulum BAC, majus quam AC, quod ſubtendit angulum B.

PROP. XIII.

In quolibet triangulo ABC, ſi ſumma Crurum AB BC ſit major æqualis vel minor ſemicirculo; internus angulus ab baſim AC erit major æqualis aut minor externo & oppoſito BCD, ideoque ſumma angulorum A & ACB major erit, aut æqualis, aut minor duobus rectis.

Vide Fig. Prop. 10.

Sit primò AB + BC = ſemicirculo = AD, erit BC = BD; & anguli BCD & D æquales, (per 7 hujus) unde & angulus BCD erit = angulo A.

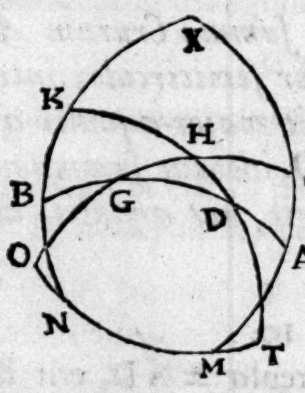
Sit ſecundò AB + BC majores quam ABD, erit BC major quam BD; unde & angulus D, hoc eſt angulus A) major erit angulo BCD. (per 12. hujus) Similiter oſtendetur, ſi AB + BC ſint ſimul minores ſemicirculo, fore angulum A minorem angulo BCD. & quoniam anguli BCD & BCA ſunt = duobus rectis; ſi angulus A ſit major BCD, erit A & BCA majores duobus rectis. Si A ſit = BCD erit A & BCA æquales duobus rectis. Si vero A ſit minor quam BCD, erunt A & BCA minores duobus rectis. Q.E.D.

PROP.

PROP. XIV.

In quolibet triangulo GHD, laterum poli, ductis circulis maximis, conſtituunt aliud triangulum XMN, quod ſupplementum eſt trianguli GHD; nempe latera NX XM & NM erunt ſupplementa ad ſemicirculos arcuum qui ſunt menſuræ angulorum D, G, H. Quin etiam menſuræ angulorum M, X, N, erunt ſupplementa ad ſemicirculos, laterum GH GD & HD.

Polis G, H, D, deſcribantur maximi circuli XCAM TMNO XKBN. Et quia G eſt polus circuli XCAM,



erit GM = Quadranti, (per cor. 1. prop. 2.) & ob H polum circuli TMO, erit HM quoque Quadrans; Quare (per corol. 1. prop. 3.) erit M polus circuli GH. Similiter quia D eſt polus circuli XBN, & H polus circuli TMN, erunt arcus DN HN Quadrantes; ac proinde (per cor. 1. prop. 3.) N erit polus circuli HD. Et eadem ratione, ob GX DX quadrantes, erit X polus circuli GD. Hiſce præmiſſis.

Quoniam eſt NK = Quadranti, (cor. 1. prop. 2.) & XB = Quadranti, erunt NK + XB hoc eſt NX + KB = duobus Quadrantibus ſeu ſemicirculo; adeoque eſt NX ſupplementum arcus KB ſeu menſuræ anguli HDG ad ſemicirculum. Similiter quia eſt MC = Quadranti, & XA = Quadranti; erunt MC + XA, hoc eſt, XM + AC = duobus quadrantibus ſeu ſemicirculo, & proinde XM eſt ſupplementum arcûs AC qui eſt menſura anguli HGD. Quinetiam, ob MO, NT Quadrantes, erunt MO + NT = OT + NM = ſemicirculo. itaque eſt NM ſupplementum ad ſemicirculum arcûs OT ſeu menſuræ anguli GHD. Q. E. D.

Præterea

Præterea quia DK HT ſunt quadrantes, erunt DK + HT ſeu KT + HD æquales duobus quadrantibus, ſeu ſemicirculo. Eſt ergo KT, ſeu menſura anguli XNM, ſupplementum lateris HD ad ſemicirculum. Nec diſſimili methodo oſtendetur OC menſuram anguli XMN eſſe ſupplementum lateris GH. Et BA menſuram anguli X eſſe ſupplementum lateris GD. Q.E.D.

PROP. XV.

Triangula æquiangula ſunt etiam æquilatera.

Nam eorum ſupplementa ſunt æquilatera, (per 14. hujus) ergo & æquiangula, quare & ipſa ſunt æquilatera, per prop. 14. partem ſecundam.

PROP. XVI.

Trianguli tres anguli ſunt majores duobus rectis, & minores ſex rectis.

Vide fig. Prop. 14.

Nam tres menſuræ angulorum G, H, D, una cum tribus lateribus trianguli XNM faciunt tres ſemicirculos, (per 14. hujus) ſed tria latera trianguli XNM minora ſunt duobus ſemicirculis, (per 11. hujus) quare tres menſuræ angulorum GHD majores ſunt ſemicirculo, & proinde anguli GHD majores erunt duobus rectis.

Propoſitionis ſecunda pars patet, nam in quolibet triangulo, externi & interni anguli ſimul tantum faciunt ſex rectos, unde interni ſunt minores quam ſex recti.

PROP. XVII.

Si à puncto R quod circuli AFBE polus non eſt, in circumferentiam cadant arcus maximorum circulorum RA RB RG RV, maximus eſt RA, qui per ejus polum C incedit; reliquus vero minimus, cæteri prout à maximo recedunt minores ſunt, faciuntque

ciuntque cum priore circulo AFB angulum obtusum ex parte maximi arcus.

Vide Fig. Prop. 1.

Quia C eſt polus circuli AFB, erunt CD & huic parallela RS perpendiculares ad planum AFB; Ductis autem SA SG SV; erit (per 7. El. 3.) SA major quam SG, & SG major quam SV. unde in Triangulis rectangulis planis RSA RSG RSV, erunt RS q + SA q ſeu RA q majora quam RS q + SG q ſeu RG q, & proinde RA major erit RG; & arcus RA major arcu RG. Similiter erunt RS q + SG q ſeu RG q majora quam RS q + SV q ſeu RV q; & proinde RG major RV, & arcus RG major arcu RV.

2do. Eſt angulus RGA major angulo CGA qui rectus eſt, (per corol. prop. 2.) Et angulus RVA major angulo CVA qui quoque rectus eſt, quare anguli RGA RVA ſunt obtuſi.

PROP. XVIII.

In triangulo rectangulo ad A, crura angulum rectum continentia ſunt ejuſdem affectionis cum angulis oppoſitis, hoc eſt, ſi crura ſint majora aut minora Quadrantibus, anguli illis oppoſiti erunt majores aut minores rectis angulis. Vide Fig. prop. primæ.

Nam ſi AC ſit Quadrans, C erit polus circuli AFB, & anguli AGC vel AVC erunt recti. Si crus AR ſit majus quadrante, erit angulus AGR major recto (per 17. hujus.) Si crus ſit minus quadrante ut AX, angulus AGX erit minor recto.

PROP. XIX.

Si duo crura trianguli rectanguli (& conſequenter anguli) ſint ejuſdem affectionis, id eſt, utrumque vel majus

majus vel minus Quadrante, hypotenuſa erit minor quadrante.

Vide Fig. Prop. 1.

In triangulo ARV vel BRV, ſit F polus cruris AR, & erit RF quadrans, qui major eſt quam RV (per 17. hujus.)

PROP. XX.

Si ſint diverſæ affectionis, hypotenuſa erit major Quadrante.

Nam in triangulo ARG, eſt RG major quam RF qui eſt quadrans.

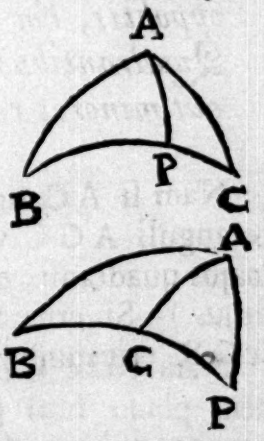
PROP. XXI.

Si Hypotenuſa ſit major Quadrante, crura anguli recti, ideoque & anguli oppoſiti ſunt diverſæ affectionis; ſi minor, ejuſdem.

Hæc propoſitio eſt priorum converſa; & facile ex iiſdem ſequitur.

PROP. XXII.

In quovis triangulo ABC, ſi anguli B & C ad baſim ſunt ejuſdem affectionis, perpendicularis AP cadet intra triangulum; ſi ſint diverſæ affectionis, perpendicularis cadet extra triangulum.



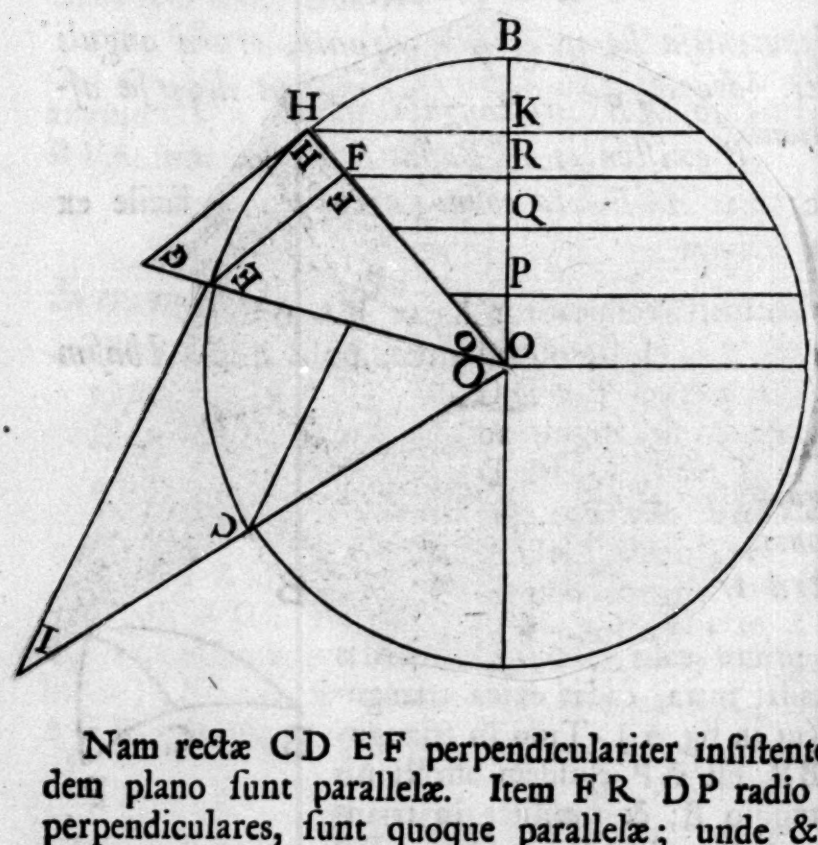
In primo caſu ſi perpendicularis non cadat intra, cadat extra triangulum, (ut in fig. 2.) Tum in triangulo ABP, eſt AP ejuſdem affectionis cum angulo B; & ſimiliter in triangulo ACP, eſt AP ejuſdem affectionis cum angulo ACP; ergo cum ABC & ACP ſunt ejuſdem affectionis,

nis, erunt anguli ABC & ACB diverſæ affectionis; quod eſt contra hypotheſim.

In 2*do* Caſu ſi perpendicularis non cadat extra, cadet intra, (in fig. 1.) Et in triangulo ABP, eſt angulus B ejuſdem affectionis cum crure AP, & ſimiliter in triangulo ACP eſt angulus C ejuſdem affectionis cum AP, unde anguli B & C ſunt ejuſdem affectionis, quod eſt contra hypotheſim.

PROP. XXIII.

In Triangulis BAC BHE rectangulis ad A & H, ſi idem fuerit angulus acutus B ad baſim BA vel BH, Sinus hypotenuſarum erunt ſinubus arcuum perpendicularium proportionales.



Nam rectæ CD EF perpendiculariter inſiſtentes eidem plano ſunt parallelæ. Item FR DP radio OB perpendiculares, ſunt quoque parallelæ; unde & plana triangulorum EFR CDP ſunt parallela (per 15. El. 11.) Quare & CP ER horum planorum communes ſectiones

ſectiones cum plano per BE CO tranſeunte parallelæ erunt (per 16. El. 11.) Triangula igitur CDP EFR æquiangula erunt. Quare CP ſinus Hypotenuſæ BC eſt ad CD ſinum arcus perpendicularis CA; ut ER ſinus hypotenuſæ BE eſt ad EF ſinum arcus perpendicularis EH. Q. E. D.

PROP. XXIV.

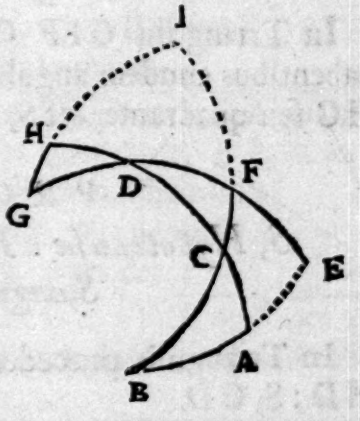
Iiſdem poſitis, AQ HK ſinus baſium, tangentibus IA GH arcuum perpendicularium, ſunt proportionales.

Nam ſimiliter ut in præcedente propoſitione, oſtenditur triangula QAI KHG eſſe æquiangula; unde QA : AI :: KH : HG.

PROP. XXV.

In Triangulo ABC rectangulo ad A. Ut coſinus anguli B exiſtentis ad Baſim BA ad ſinum anguli verticalis ACB, ita coſinus arcûs perpendicularis ad Radium.

Præparatio. Producantur latera BA BC CA ita ut BE BF CI CH ſint Quadrantes, polis B & C ducantur circuli maximi EFDG IHG. & erunt anguli ad E, F, I & H recti. Quare D eſt polus BAE (per cor. 2. pr. 2 hujus) & G polus IFCB, erit etiam AE = complemento arcûs BA. Item FE menſura anguli B = GD, & DF eorum complementum. erit quoque BC = FI = menſuræ anguli G, & CF eorum complementum. Item eſt CA = HD, & DC utriuſque complementum. Hiſce præmiſſis, in triangulis HIC DCF rectangulis ad I & F & habentibus eundem angulum



gulum C acutum, ob B A minorem quadrante, erit S, D F : S, H I : : S, D C : S, H C id eſt, coſinus anguli B eſt ad ſinum anguli verticalis B C A ut coſinus C A ad Radium. Q. E. D.

PROP. XXVI.

Coſinus baſis : coſin. Hypotenuſæ : : R : coS perpendicularis.

Nam in Triangulis A E D C F D rectangulis ad E & F; habentibus eundem angulum D acutum: ob A E quadrante minorem, eſt S, E A : S, C F : : S, D A : S, D C. Q. E. D.

PROP. XXVII.

S, Baſeos : R : : T, perpendicularis : T, anguli ad baſim.

Nam in Triangulis B A C B E F rectangulis ad A & E & habentibus eundem angulum B acutum, ob A C minorem quadrante, S, B A : S, B E : : T, A C : T, E F. Q. E. D.

PROP. XXVIII.

CoS, anguli verticalis : R : : T, perpendicularis : T, Hypotenuſæ.

In Triangulis G I F G H D rectangulis ad I & H, & habentibus eundem angulum G acutum, ob H D minorem H C ſeu quadrante, eſt S, G H : S, G I : : T, H D : T, I F.

PROP. XXIX.

S, Hypotenuſæ : R : : S, perpendicularis : S, anguli ad baſim.

In Triangulis præcedentibus, eſt S, I F : S, G F : : S. H D : S, G D.

PROP.

PROP. XXX.

Radius : coS. Hypotenuſæ :: T, anguli verticalis : coT, anguli ad baſim.

In Triangulis H I C D F C rectangulis ad I & F, & habentibus eundem angulum C acutum, ob D F minorem quadrante, Eſt S, C I : S, C F :: T, H I : T, D F. hoc eſt, R : coS, B C :: Tang, C : coT, anguli B.

Propoſitiones ſex præcedentes ad omnes caſus triangulorum rectangulorum reſolvendos ſufficiunt, ſequuntur illi numero ſedecim cum ſuis analogiis ex hiſce deductis.

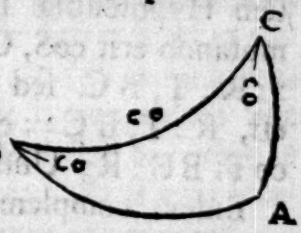
	Datis præter ang. rectum.	Quær.		
1	A C & C	B	R : coS, C A : : S, C : coS, B ejuſdem ſpeciei cum C A.	per 25 inverſe
2	A C & B	C	coS, C A : R : : coS, B : S, C ambigui.	per 25
3	B & C	A C	S, C : coS, B : : R : coS, C A ejuſdem ſpeciei cum ang. B.	per 25 & 18
4	B A C A	B C	R : coS, B A : : coS, A C : coS B C. Si B A A C fuerint ejuſdem affectionis nec Quadrantes, erit B C minor quadrante; ſi diverſæ, erit B C quadrante major.	per 26 & 19 20
5	B A B C	A C	coS, B A : R : : coS, B C : coS, C A. Si B C ſit minor quadrante, B A, & C A erunt ejuſdem affectionis, ſi major, diverſæ, ſed datur B A ejuſque Species, ergo &c.	per 26 & 21
6	B A C A	B	S, B A : R : : T, C A : T, B ejuſdem affectionis cum latere oppoſito C A.	per 27 & 18
7	B A B	A C	R : S, B A : : T, B : T, A C, ejuſdem ſpeciei cum B.	per 27 & 18

	Datis præter Quær.				
	ang. rectum.				
8	A C	B	B A	T, B : R : : T, C A : S, B A ambigui.	per 27
9	B C	C	A C	R : coS, C : : T, B C : T, C A. Si B C ſit minor quadrante, anguli C & B ſunt ejuſdem affectionis, ſi major diverſæ, quare data ſpecie ang. B dabitur A C.	per 28 & 21
10	A C	C	B C	coS, C : R : : T, A C : T, B C. prout ang. C & A C fuerint ejuſdem aut diverſæ affectionis, B C erit minor aut major quadrante.	per 28, 20, 21
11	B C A C		C	T, B C : R : : T, C A : coS, C. Si B C fuerit minor Quadrante, C A & B A & proinde anguli C & B erunt ejuſdem affectionis, ſi major diverſæ, ſed datur ſpecies C A, ergo dabitur ſpecies anguli C.	per 28 21
12	B C	B	A C	R : S, B C : : S, B : S, A C ejuſdem ſpeciei cum B.	per 29 & 18
13	A C	B	B C	S, B : S, A C : : R : S, B C ambigui.	per 29
14	B C A C		B	S, B C : R : : S, A C : S, B ejuſdem ſpeciei cum C A.	per 29
15	B	C	B C	T, C : R : coT, B : coS, B C. prout anguli B & C ejuſdem aut diverſæ affectionis fuerint, erint B C minor aut major quadrante.	per 30 19 20
16	B C	C	B	R : coS, B C : : T, C : coT, B. prout B C fuerit minor aut major quadrante; anguli C & B erunt ejuſdem aut diverſæ affectionis. Sed datur ſpecies anguli C. quare dabitur ſpecies auguli B.	per 30 21

De

De Reſolutione Triangulorum Rectangulorum Sphæricorum, per quinque partes circulares.

PErpenſis Analogiis, quibus Triangula Sphærica Rectangula ſolvuntur, Dominus *Neperus*, nobilis ille Logarithmorum Inventor, duas excogitavit Regulas memoriâ facile retinendas, quarum ope omnes ſedecim caſus reſolvi poſſunt; Nam cum in hiſce triangulis, præter angulum rectum, ſint tria latera & duo anguli, latera angulum rectum comprehendentia, hypotenuſa autem & reliquorum angulorum complementa, vocavit *Neperus partes circulares*. Et cum datæ ſunt duæ quælibet partes, & quæritur Tertia, Harum trium una, quæ dicitur *pars media*, vel adjacet duobus reliquis partibus, quæ itaque vocantur *extremæ adjacentes*; vel neutri adjacet, in quo caſu, dicuntur *extremæ oppoſitæ*; Sic ſi complementum angli B ponatur pars media, Crus AB & complementum Hypotenuſæ BC ſunt partes extremæ adjacentes; At complementum anguli C, & latus AC ſunt extremæ oppoſitæ. Item poſito complemento hypotenuſæ BC parte media, complementa angulorum B & C ſunt extremæ adjacentes; & AB AC crura ſunt extremæ oppoſitæ. Sic etiam poſito crure AB parte media, complementum anguli B, & AC ſunt extremæ adjacentes; Nam angulus rectus A non intercipit adjacentiam, quia non eſt pars circularis. At eidem parti mediæ complementum anguli C & complementum hypotenuſæ BC ſunt extremæ oppoſitæ. Hiſce præmiſſis.



REGULA PRIMA.

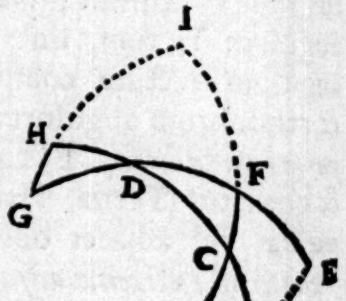
In Triangulo Rectangulo Sphærico, Rectangulum ſub Radio & ſinu partis mediæ, æquale eſt rectangulo ſub Tangentibus partium Adjacentium.

REGULA SECUNDA.

Rectangulum ſub radio & ſinu partis mediæ, æquale eſt rectangulo ſub coſinubus partium oppoſitarum.

Utriuſque Regulæ tres ſunt caſus. Nam pars media vel poteſt eſſe complementum anguli B vel C, vel complementum hypotenuſæ BC; vel denique unum ex cruribus ſcil. AB vel AC.

Caſus 1. Sit complementum anguli C pars media. Et erunt AC & complementum hypotenuſæ BC extremæ adjacentes. Per pr. 28. Eſt ut coſinus anguli verticalis C ad Radium, Ita Tangens CA ad Tangentem Hypotenuſæ BC. permutando erit coS, C : T, CA : : R : T, BC. ſed ut notum eſt, R : T, BC : : coT, BC : R. quare coS, C : T, AC :: coT, BC : R; Unde R x coS, C = T, AC x coT, BC.



Eidem complemento anguli C parti mediæ, extremæ oppoſitæ ſunt complementum anguli B & AB, & (per prop. 25.) coSinus anguli C eſt ad ſinum anguli CDF ut coSinus DF ad Radium, eſt vero Sinus CDF = S, AE = coS, BA, & coS, DF = S, EF = S, ang. B. unde erit coS, C: coS, BA : : S, B: R. & R x coS, C = coS. BA x S, B hoc eſt, Radius ductus in ſinum partis mediæ, æquatur rectangulo ſub coſinubus extremarum oppoſitarum.

Caſus 2. Sit complementum hypotenuſæ BC pars media, & complementa angulorum B & C erunt extremæ adjacentes. In triangulo DCF (per prop. 27.) Eſt S, CF: R : : T, DF : T, C. unde permutando S, CF : T, DF :: (R : T, C : :) coT, C : R. eſt autem S, CF = coS, BC & T, DF = coT, B quare eſt R x coS, BC = coT, C x coT, B. hoc eſt, Radius ductus in ſinum partis mediæ æquatur producto

producto ex Tangentibus partium adjacentium extremarum.

Eidem parti mediæ, ſcil. complemento BC, adſunt extremæ oppoſitæ AB AC, & (per prop. 26.) eſt coS, BA: coS, BC:: R: coS, AC. quare erit R × coS, BC = coS, BA × coS, AC.

Caſ. 3. Sit denique AB pars media, & erunt complementum anguli B & AC extremæ adjacentes, (& per pr. 27.) S, AB: R:: T, CA: T, B. unde erit S, AB: T, CA :: (R: T, B::) coT, B: R. adeoque erit R × S, AB = T, CA × coT, B.

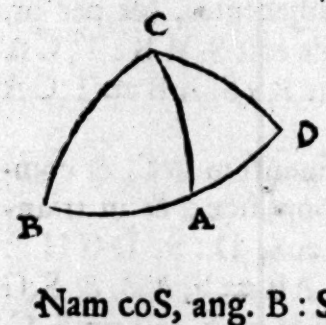
Præterea parti mediæ AB, complementum BC, & complementum anguli C ſunt extremæ oppoſitæ; & in triangulo GHD (per prop. 25.) Eſt coS, D: S, DGH:: coS, GH: R. eſt vero coS, D = coS, AE = S, AB, & S. G = S, IF = S, BC. Item eſt coS, GH = S, HI = S, C. quare erit S, AB: S, BC: S, C: R. & hinc R × S, AB = S, BC × S, C.

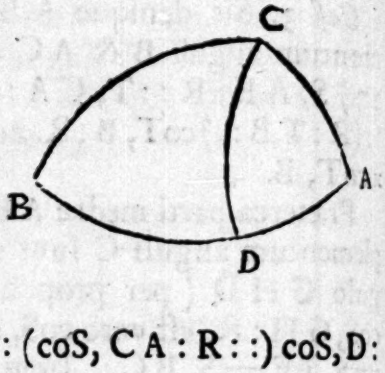
Itaque in omni caſu, rectangulum ſub radio & ſinu partis mediæ æquale erit tam rectangulo ſub coſinubus extremarum oppoſitarum, quam rectangulo ſub tangentibus extremarum adjacentium. Et proinde ſi æquationes illæ reſolvantur in Analogias (per 16. Elem. 6.) ope regulæ Proportionis, partes ignotæ innoteſcent. Et ſi pars quæſita ſit media, primus Analogiæ terminus erit Radius, ſecundum & tertium occupant locum tangentes vel coſinus partium extremarum. Si vero quæratur extremarum una, Analogia incipi debet cum altera, atque Radius ſinuſque partis mediæ, in mediis ponantur locis, ut quartum teneat pars quæſita.

IN Triangulis Sphæricis obliquangulis BCD, demiſſo arcu perpendiculari AC, ab angulo C in Baſim BD, (productam ſi opus fuerit,) ut duo fiant Triangula BAC DAC rectangula; eorum ope reſolvi poſſunt plerique caſus Triangulorum obliquangulorum.

PROP. XXXI.

Cosinus angulorum B & D ad basim B D, sinubus angulorum verticalium B C A D C A sunt proportionales.





Nam coS, ang. B : S, B C A : : (coS, C A : R : :) coS, D: S, D C A (per 25. hujus.)

PROP. XXXII.

Cosinus laterum B C D C sunt proportionales cosinubus basium B A D A.

Est enim coS, B C : coS, B A : : (coS, C A : R : :) coS, D C: coS, D A. (per 26. hujus.)

PROP. XXXIII.

Sinus basium B A D A, sunt in reciproca proportione tangentium angulorum B & D ad Basim B D.

Quia per 27. hujus est, S, B A : R : : T, A C : T, anguli B. Item per eandem, inverse R : S, D A : : T, ang. D: T, A C. erit ex æquo in perturbata ratione (per 23. El. 5.) S, B A : S, D A : : T, ang. D : T, ang. B.

PROP. XXXIV.

Tangentes laterum B C D C sunt in reciproca proportione cosinuum angulorum verticalium B C A, D C A.

Quia

Quia per 28. hujus permutando, Eſt

T, BC : R :: T, CA : coS, BCA.

& per eandem R : coS, DCA :: T, DC : T, CA

quare ex æquo in perturbata ratione eſt.

T, BC : coS, DCA :: T, DC coS, BCA.

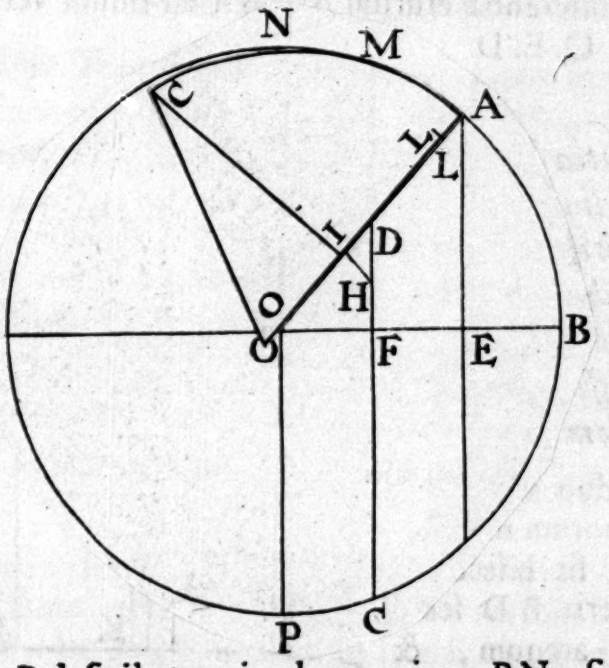
PROP. XXXV.

Sinus laterum BC DC ſinubus angulorum oppoſitorum B & D ſunt proportionales.

Quia per 29. hujus S, BC : R :: S, CA : S, ang. B. & per eandem inverſe R : S, DC :: S, ang. D : S, CA erit ex æquo in perturbata ratione S, BC : S, DC :: S, D : S, B.

PROP. XXXVI.

In Triangulo quovis Sphærico ABC, CF × AE vel FM × AE, rectangulum ſub ſinubus crurum BC BA eſt ad radii quadratum, ut IL ſeu IA — LA differentia ſinuum verſorum Baſis AC, & differentiæ crurum AM, ad GN ſinum verſum angli B.

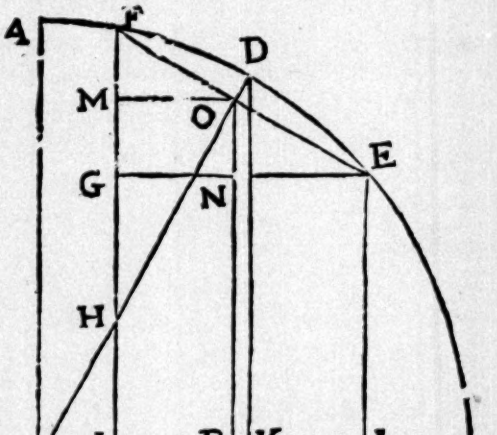


Polo B deſcribatur circulus maximus PN; ſintque BP

BN quadrantes; & PN eſt menſura anguli B; eodem polo B per C deſcribatur circulus minor CFM; horum circulorum plana recta erunt plano BON, (per 2. h.) & PG CH perpendiculares in idem planum, cadent in communes ſectiones ON FM puta in G & H. ducatur HI perpendicularis ad AO, & planum per CH HI perpendiculare erit plano AOB, unde AI perpendicularis ad HI, erit perpendicularis ad rectam CI, (per def. 4. El. 11.) eſt itaque AI ſinus verſus arcus AC, & AL ſinus verſus arcus AM = BM — BA = BC — BA. Triangula Iſoſcelia CFM PON ſunt æquiangula ob MF NO item CF PO parallelas (per 16. El. 11.) quare demiſſis perpendiculis CH PG in latera FM ON, ſimiliter diviſa erunt Triangula; & erit FM : ON :: MH : GN. Itemque ob triangula AOE DIH DLM æquiangula erit AE : AO :: IL : MH
at oſtenſum eſt, eſſe FM : ON :: MH : GN quare erit AE × FM ad AO × ON ut IL × MH, ad MH × GN ſeu ut IL ad GN. hoc eſt rectangulum ſub ſinubus crurum eſt ad quadratum Radii ut differentia ſinuum verſorum baſis & differentiæ crurum BC BA ad ſinum verſum anguli B. Q. E. D.

PROP. XXXVII.

Differentia Sinuum verſorum duorum arcuum ducta in dimidium radii, æqualis eſt rectangulo ſub ſinu ſemiſummæ & ſinu ſemidifferentiæ eorundem arcuum.



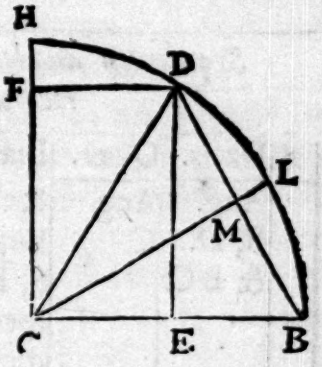
Sint duo arcus BE BF, quorum differentia EF ſit biſecta in D, & erit BD ſemiſumma arcuum, & FD ſemidifferentia.

Eſt

Eſt GE = IL differentiæ ſinuum verſorum arcuum BE BF; Item eſt FO ſinus ſemidifferentiæ arcuum. Ob æquiangula triangula CDK FEG; erit DK : GE : : (CD : FE : :) ½CD : ½FE. Unde eſt DK × ½FE ſeu DK × FO = GE × ½CD = IL × ½CD. Q. E. D.

PROP. XXXVIII.

Sinus verſus cujuſvis arcus, ductus in dimidium Radii, æqualis eſt quadrato ſinus dimidii ejuſdem arcus.



Triangula CBM DEB ſunt æquiangula ob angulos ad M & E rectos & angulum ad B communem. Quare eſt EB : BD : : BM : BC erit itaque EB × BC = BM × BD & EB × ½BC = BM × ½BD = BMq. Q. E. D.

PROP. XXXIX.

In quolibet Triangulo ABC, cujus crura angulum B continentia ſint BC AB, & baſis AC eundem angulum ſubtendat; ſi capiatur AM arcus = differentiæ crurum = BC — AB. erit Rectangulum ſub ſinubus crurum BC BA ad quadratum Radii ut Rectangulum ſub ſinu arcus $\frac{AC+AM}{2}$ *& ſinu arcus* $\frac{AC-AM}{2}$ *ad Quadratum ſinus dimidii anguli B.*

Vide Fig. Prop. 36. hujus.

Quoniam eſt rectangulum ſub ſinubus crurum AB BC ad quadratum radii, ut IL ad ſinum verſum anguli B vel ut ½R × IL ad ½R ductum in ſinum verſum anguli B (per prop. 36. hujus) Eſt autem ½R × IL = rectangulo ſub

ſub ſinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$ (per pr. 37. hujus.) Item eſt $\frac{1}{2}$ R ductus in ſinum verſum anguli B æqualis Quadrato ſinus dimidii anguli B. Quare erit Rectangulum ſub ſinubus crurum, ad Radii quadratum ut Rectangulum ſub ſinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$ ad Quadratum ſinus dimidii anguli B. Q. E. D.

Sequuntur duodecim Caſus Triangulorum Sphæricorum obliquangulorum.

	Datis.	Quær.	Fiat. *Vide Fig. Prop.* 31.
1	Ang. B, D. & BC.	Ang. C.	R : coS, BC : : T, B : coT, BCA (per 30. hujus.) Item coS, B : S, BCA : : coS, D : S, DCA (per 31. hujus.) Horum angulorum BCA DCA ſumma, ſi perpendicularis cadat intra triangulum, vel differentia, ſi extra cadat; erit = BCD. Num perpendicularis cadat intra vel extra, cognoſcitur ex affectione angulorum B & D (per 22. hujus) quod ſomel monuiſſe ſufficiat.
2	Ang. B, C, & latere BC.	Ang. D.	R : coS, BC : : T, B : coT, BCA (per 30. hujus) & S, BCA : S, DCA : : coS, B : coS, D (per 31, hujus.) Si BCA ſit minor BCD, angulus D erit ejuſdem affectionis cum angulo B. Sin BCA ſit major BCD, anguli B & D erunt affectionis diverſæ per converſam pr. 22.
3	BC CD lateribus & ang. B.	BD latus-	R : coS, B : : T, BC : T, BA. (per 28. hujus) & coS, BC : coS, BA : : coS, DC : coS, DA (per 32. hujus) horum BA DA ſumma vel differentia, prout perpendicularis cadit intra, vel extra Triangulum, eſt æqualis BD; quod cognoſci nequit niſi cognita ſit ſpecies alterius anguli D. Datis

	Datis.	Quær.	Fiat.
4	BC DB lateribus & ang. B.	C D latus.	R : coS, B : : T, BC : T, BA (per 28. hujus.) Et coS, BA : coS, BC : : coS, DA : coS, D C. (per 32. h.) Prout D A ſimilis eſt aut diſſimilis C A vel ang. B D C, erit D C minor aut major Quadrante (per 19 & 20 hujus.)
5	B, D, ang. & BC latere.	B D latus.	R : coS, B : : T, BC : T, B A (per 28. hujus.) Et T, D : T, B : : S, BA : S, D A (per 33. hujus.) quorum B A D A ſumma vel differentia = B D.
6	BC BD lateribus & ang. B.	Ang. D.	R : coS, B : : T, BC : T, BA. (per 28. hujus.) Et S, DA : S, BA : : T, B : T, D (per 33. hujus.) Prout B D minor eſt aut major quam BA, angulus D ſimilis aut diſſimilis erit angulo B. (per 22. hujus.)
7	BC DC lateribus & ang. B.	Ang. C.	coS, B C : R : : coT, B : T, B C A (per 30. h.) Et T, DC : T, BC : : coS, BCA : coS, DCA (per 34. hujus.) Angulorum B C A D C A ſumma aut differentia, prout perpendicularis cadit intra vel extra triangulum, eſt æqualis angulo B C D.
8	B, C, ang. & BC latere.	D C latus.	coS, BC : R : : coT, B : T, BCA. (per 30. hujus.) Item coS, D C A : coS, B C A : T, BC : T, DC (per 34. h.) Si angulus D C A ſimilis ſit angulo B (hoc eſt, ſi A D ſit ſimilis C A) erit D C minor quadrante. Si anguli D C A & B ſint diſſimiles, erit D C quadrante major, quod ſequitur (ex pr. 18 19 & 20 h.)
9	BC DC lat. & ang. B.	D. ang.	S, C D : S, B : : S, B C : S, D qui ambiguus eſt. Analogia ſequitur (ex prop. 35. hujus.)
10	B D ang. & BC lat.	D C	S, D : S, BC : : S, B : S, DC quod latus ambiguum eſt.

Datis.

	Datis.	Quær.	Fiat.
11	AB BC CA omnibus lateribus *vide fig. pr. 36.*	Ang. B.	Rectangulum ſub ſinubus crurum AB BC: quadratum Radii:: rectangulum ſub ſinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ $\frac{AC-AM}{2}$: Quadrato ſinus ½ ang. B. per prop. 39.
12	G H D omnibus ang.	G D latus.	*Vide fig. prop.* 14. In Triangulo X N M, Eſt M N complementum anguli G H D ad ſemicirculum. X M complementum anguli G & X N complementum anguli D. & angulus X complementum eſt lateris G D ad ſemicirculum. Quare mutatis angulis in latera, & lateribus in angulos; eadem eſt operatio quæ eſt in caſu 11 hujus, cum arcus & eorum complementa ad ſemicirculos habeant eoſdem ſinus.

DE

DE
Natura & Arithmetica
LOGARITHMORUM
PRÆFATIO.

INgens olim compendium accepit Matheſis, primo characterum Indicorum, deinde Fractionum decimalium introductione; non minus tamen adjumenti ex Logarithmis, quam ex utroque invento, ei acceſſit: quorum quidem uſum, per omnes diſciplinas mathematicas latiſſime patentem, quis iis ſtudiis vel leviter imbutus ignorat? Horum ope numeri fere immenſi & aliâs plane intractabiles ſine ullo tædio in ordinem coguntur: præſentiſſimum horum auxilium ubique conſpicitur, ſive curſum navis dirigat Nauta, ſive carvarum altiorum indolem inveſtiget Geometra, ſive ſtellarum loca exquirat Aſtronomus, ſive alia naturæ phænomena explicet Phyſicus, ſive demum pecuniæ ex uſuris incrementum computet Nummatus.

Argumento, in quo verſatur hic libellus, illuſtrando non defuerunt viri in re Mathematica primarii. Sed eorum alii omnem illius ambitum complexi, doctiſſimè illi quidem, ſed magiſtris ſolum ſcripſerunt: alii ad Tyronum captum ſe accommodantes, certas quaſdam, eaſque magis obvias Logarithmorum proprietates ſelegerunt, intimam eorum naturam non aperuerunt. Quod igitur adhuc deſiderari videbatur, mihi in animo erat ſupplere hoc tractatu, qui in id præcipue collimat, ut Logarithmorum ſcientia iis, qui ultra Arithmeticæ ſpecioſæ & Geometriæ elementa non proceſſerunt, penitus aliquando pateat.

Mirabile

Mirabile Logarithmorum Inventum Nepero Scoto Merchestonii *Baroni debetur, qui primus canonem Logarithmorum descripsit, construxit, & edidit,* Edinburgi *Anno* 1614. *Hunc statim omnes Mathematici, ejus utilitatem suspicientes, grati arripuerunt. Et cum de aliis fere omnibus præclaris Inventis plures contendunt Gentes, omnes tamen* Neperum *Logarithmorum authorem agnoscunt, qui tanti inventi gloria solus sine æmulo fruitur.*

Aliam deinde magis commodam Logarithmorum formam Neperus *excogitavit, & communicato consilio cum Domino* Henrico Briggio, *Geometriæ in Academia* Oxonienſi *Professore, hunc socium operis sibi adjunxit, ut Logarithmos in meliorem formam reductos compleret. Sed* Nepero *demortuo, totum quod restabat onus in* Briggium *devolutum est, qui magno labore, & summa qua pollebat ingenii subtilitate, canonem Logarithmicum secundum novam illam formam composuit, pro viginti primis numerorum chiliadibus (seu ab* 1 *usque ad* 20000) *aliisque undecim ab* 90000 *usque ad* 101000, *pro quibus omnibus numeris, supputavit Logarithmos quatuordecim figurarum locis constantes. Hic canon editus est* Londini *anno* 1624.

Eundem Canonem iteratò edidit Goudæ *apud* Batavos *anno* 1628. Adrianus Vlacq, *suppletis, ut docuerat* Briggius, *chiliadibus intermediis prius omissis; sed brevioribus usus est Logarithmis, utpote qui ad decem tantum figurarum loca continuantur.*

Computavit etiam Briggius *Logarithmos Sinuum & Tangentium, pro singulis Gradibus graduumque centesimis, ad* 15 *figurarum loca, quibus adjunxit Sinus Tangentes & Secantes veros seu naturales, quos prius ad totidem loca supputaverat. Logarithmi Sinuum & Tangentium dicuntur Sinus & Tangentes Artificiales. ipsi vero Sinus & Tangentes, naturales vocantur. Has Tabulas simul cum Tractatu de Tabularum constructione & usu, post mortem* Briggii, *sub nomine* Trigonometriæ Britannicæ *edidit* Henricus Gelibrand Londini *Anno* 1633.

Post illud tempus, pluribus in locis Tabularum compen-

dia

dia prodiere. In quibus Sinus Tangentes, eorumque Logarithmi, tantum conſtant ſeptem notarum locis, & numerorum Logarithmi exhibentur tantum pro numeris ab 1 *uſque ad* 10000, *qui pro pleriſque caſibus ſufficere poſſunt.*

Harum Tabularum diſpoſitio ea mihi videtur optima, quam primus excogitavit Nathaniel Roe Anglus Suffolcienſis, *quamque, quibuſdam in melius mutatis, ſequitur* Sherwinus *in Tabulis ſuis Mathematicis* Londini *Anno* 1705 *editis, in quibus habentur Logarithmi Numerorum omnium ab unitate uſque ad* 101000 *ſeptem figurarum notis conſtantes, Logarithmorum quoque differentiæ parteſque proportionales adſcribuntur, quarum ope Logarithmi numerorum uſque ad* 10000000 *facile haberi poſſunt; quatenus ſcil. hi Logarithmi ſeptem tantum figurarum notis exprimantur. Præterea in iiſdem proſtant Sinus Tangentes & Secantes, cum eorum Logarithmis & differentiis pro quolibet gradu & minuto Quadrantis, cum aliis quibuſdam tabulis Matheſi Practicæ inſervientibas.*

CAPUT

CAPUT I.

De ortu & natura Logarithmorum.

QUemadmodum in Geometria, linearum magnitudines numeris ſæpe definiuntur; ita quoque in Arithmetica viciſſim expedit, ut numeri aliquando per lineas exponantur, aſſumendo ſcil. lineam aliquam quæ ipſam unitatem repræſentet, ejus dupla numerum binarium, tripla ternarium, dimidia fractionem $\frac{1}{2}$, & ita deinceps, exponet. Hac ratione quorundam numerorum Geneſis & proprietates melius concipiuntur, clariuſque in animo verſantur, quam per abſtractos numeros fieri poſſit.

Hinc ſi quælibet linea a in ſeipſam ducatur, (*Fig.* 1.) quæ exinde prodit quantitas a^2, non æſtimanda eſt tanquam duarum dimenſionum, ſive ut Quadratum Geometricum cujus latus eſt linea a, ſed tanquam linea quæ ſit tertia proportionalis lineæ pro unitate aſſumptæ, & lineæ a. Sic etiam ſi a^2 per a multiplicetur, quæ prodit a^3, non erit trium dimenſionum quantitas, ſeu cubus Geometricus, ſed linea quæ eſt quartus terminus in progreſſione Geometrica cujus primus terminus eſt 1, ſecundus a. Nam termini $1\ a\ a^2\ a^3\ a^4\ a^5\ a^6\ a^7$ &c. ſunt in continua ratione 1 ad a: & indices terminis affixi oſtendunt locum ſeu diſtantiam, quam quiſque terminus ab unitate obtinet. v. gr. a^5 eſt in quinto loco ab unitate, a^6 in ſexto ſeu ſexies magis diſtans ab unitate quam a ſeu a^1, qui immediate ſequitur unitatem.

Si inter terminos 1 & a inſeratur medius proportionalis qui eſt $\sqrt{a}$, ejus index erit $\frac{1}{2}$, nam ejus diſtantia ab unitate erit ſemiſſis diſtantiæ a ab unitate, adeoque pro $\sqrt{a}$ ſcribi poteſt $a^{\frac{1}{2}}$. Et ſi inter a & a^2 inſeratur medius proportionalis, ejus index erit $1\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{3}{2}$, nam ejus diſtantia erit ſeſquialtera diſtantiæ ipſius a ab unitate.

Si inter 1 & a inſerantur duo medii proportionales; horum

horum primus eſt radix cubica ipſius a, cujus index debet eſſe $\frac{1}{3}$. Nam terminus ille diſtat ab unitate tertiâ tantum parte diſtantiæ ipſius a, adeoque radix cubica ſcribi debet per $a^{\frac{1}{3}}$. Hinc Index ipſius Unitatis eſt o, nam unitas non diſtat à ſeipsâ

Eadem ſeries quantitatum Geometrice proportionalium continuari poteſt utrinque, tam deſcendendo verſus ſiniſtram, quam aſcendendo verſus dextram; termini enim $\frac{1}{a^5}\ \frac{1}{a^4}\ \frac{1}{a^3}\ \frac{1}{a^2}\ \frac{1}{a}\ 1\ a\ a^2\ a^3\ a^4\ a^5$ &c. ſunt omnes in eadem progreſſione Geometrica. Adeoque cum diſtantia ipſius a ab unitate ſit verſus dextram & poſitiva ſeu $+1$, diſtantia æqualis in contrariam partem, ſcil. diſtantia termini $\frac{1}{a}$ erit negativa ſeu -1, qui erit index termini $\frac{1}{a}$ pro quo itaque ſcribi poteſt a^{-1}. Similiter in termino a^{-2}, index -2 oſtendit terminum in ſecundo loco ab unitate verſus ſiniſtram locari, idemque valet terminus a^{-2} ac $\frac{1}{a^2}$. Item a^{-3} eſt idem ac $\frac{1}{a^3}$. Indices enim hi negativi oſtendunt terminos ad quos pertinent, in partem diſcedere contrariam ei, quâ ab unitate progrediuntur termini, quorum indices ſunt poſitivi. Hiſce præmiſſis.

Si ſuper linea AN utrinque indefinite extensâ, (*Fig.* 2.) capiantur AC CE EG GI IL dextrorſum. Item Aᴦ ᴦΠ &c. ſiniſtrorſum, omnes inter ſe æquales: & ad puncta Π ᴦ A C E G I L erigantur ſuper AN perpendiculares rectæ Πϛ ᴦΔ AB CD EF GH IK LM quæ ſint omnes continue proportionales, numeroſque repreſentent, quorum AB ſit unitas. Lineæ AC AE AG AI AL — Aᴦ — AΠ diſtantias numerorum ab unitate reſpective exponent, ſive locum & ordinem quem quiſque numerus in ſerie Geometrice proportionalium obtinet, prout ab unitate diſtat. Ita AG cum ſit tripla rectæ AC, erit numerus GH in tertio ab unitate loco, ſi modo CD ſit in primo, ſic LM erit in quinto loco cum ſit AL = 5 AC.

Quod ſi proportionalium extremitates ΣΔ B D F H K M rectis lineis jungantur; figura ΣΠ L M ſit polygonum pluribus aut paucioribus conſtans lateribus, prout plures aut pauciores in progreſſione fuerint termini.

Si partes A C C E E G G I I L biſecentur in punctis *c e g i l* & rurſus excitentur perpendiculares *c d e f g h i k l m*, quæ ſint mediæ proportionales inter A B C D, C D E F, E F G H, G H I K, I K L M, nova orietur proportionalium ſeries, cujus termini incipiendo ab eo qui proxime ſequitur unitatem duplo plures ſunt, quam in prima ſerie, & terminorum differentiæ minores fiunt, propiuſque ad rationem æqualitatis accedunt termini, quam prius; quin etiam in hac nova ſerie, rectæ A L A C diſtantias terminorum L M C D ab unitate exponent, ſcil. cum A L decies major ſit quam A *c*; erit L M decimus ſeriei terminus ab unitate, & ob A *e* triplo majorem quam A *c*, erit *e f* tertius ſeriei terminus, modo *c d* ſit primus: & inter A B & *e f* erunt duo medii proportionales, inter A B vero & L M erunt novem termini medii proportionales.

Quod ſi linearum extremitates B *d* D *f* F *b* H &c. rectis jungantur, fiet novum polygonum, pluribus quidem, at brevioribus conſtans lateribus.

Si rurſus diſtantiæ A *c* *c*C C *e* *e*E &c. biſecari concipiantur, & inter binos quoſque terminos, ad medias illas diſtantias inſeri intelligantur medii proportionales, alia nova orietur proportionalium ſeries, terminos ab unitate duplo plures continens quam prior. Terminorum vero differentiæ minores erunt; junctiſque terminorum extremitatibus, numerus laterum polygoni augetur ſecundum numerum terminorum, minora autem erunt latera, ob diminutas terminorum à ſe invicem diſtantias.

Quin in hac nova ſerie, diſtantiæ A L A C &c. determinabunt terminorum ordines ſeu locos, nempe ſi ſit A L quintuplo major quam A C; ſitque C D quartus ab unitate ſeriei terminus: erit L M iſtius ſeriei terminus viceſimus ab unitate.

Si ſic continuo inter binos quoſque terminos inſerantur medii proportionales, fiet tandem numerus terminorum

rum ſeriei, ſicut & laterum polygoni major quolibet dato numero ſeu infinitus; latera vero ſingula magnitudine diminuta fient quavis datâ rectâ lineâ minora; Adeoque mutabitur polygonum in figuram curvilineam. Nam quælibet figura curvilinea conſiderari poteſt, tanquam polygonum cujus latera ſunt numero infinita, & magnitudine minima.

Curva ſic deſcripta dicitur *Logarithmica*, in qua ſi numeri per rectas ad axem A N normaliter inſiſtentes, repreſententur; portio Axis inter numerum quemlibet, & Unitatem intercepta, oſtendit locum ſeu ordinem quem numerus ille obtinet in ſerie Geometrice proportionalium, & æqualibus intervallis ab invicem diſtantium. Verbi gratia, ſi A L ſit quintuplo major quam A C, ſintque ab unitate ad L M mille termini continue proportionales, erunt ab unitate ad C D ducenti termini ejuſdem ſeriei, ſeu erit C D terminus ſeriei ducenteſimus ab unitate; & quicunque ſupponatur numerus terminorum ab A B ad L M, erit iſtius numeri pars quinta numerus terminorum ab A B ad C D.

Curva Logarithmica poteſt etiam concipi duobus motibus deſcribi, quorum unus æquabilis eſt, alter vero in data quadam ratione acceleratur, vel retardatur: v. gr. ſi recta A B ſuper A N uniformiter incedat adeo ut terminus ejus A æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcribat, interea tamen ita creſcat A B, ut æqualibus etiam temporibus incrementa capiat, quæ ſint toti lineæ creſcenti proportionalia, hoc eſt ſi A B progrediendo in *c d*, augeatur parte ſui *o d*, & hinc æquali tempore quando in C D pervenerit, augeatur ſimili parte D *p*, quæ ſit ad *d c* ut incrementum *d o* ad A B, ſimiliter, dum æquali tempore ad *e f* pervenerit, creſcat parte *f q*, quæ ſit ad D C ut D *p* ad *d c* ſeu ut *d o* ad A B, id eſt, in æqualibus temporibus incrementa facta ſint ſemper totis proportionalia.

Vel ſi linea A B regrediendo in contrariam partem, in conſtanti ratione minuatur, ita ut, dum æqualia ſpatia A Γ Γ Π pertranſit, decrementa patiatur A B — Γ Δ Γ Δ — Π Σ quæ ſint ipſis A B Γ Δ proportionalia. Lineæ ſic creſcentis aut decreſcentis terminus Logarithmicam deſcribet.

Nam cum ſit AB: *do*:: *dc*: D*p*:: DC: *fq* erit componendo AB: *dc*:: *dc*: DC:: DC: *fe* & ita deinceps.

Per hos duos motus, unum ſcil. æquabilem, alterum proportionaliter acceleratum aut retardatum, ipſe *Neperus* Logarithmorum originem expoſuit. Logarithmum ſinus cujuſque arcus vocavit, *Numerum qui quam proxime definit lineam quæ æqualiter crevit, interea dum ſinûs totius linea proportionaliter in ſinum illum decrevit.*

Ex hac Logarithmicæ deſcriptione conſtat, numeros omnes in æqualibus diſtantiis, eſſe continue proportionales. Quin etiam patet, quod ſi ſint quatuor numeri AB CD IK LM tales, ut diſtantia inter primum & ſecundum ſit æqualis diſtantiæ inter tertium & quartum, qualiſcunque ſit diſtantia ſecundi à tertio, erunt illi numeri proportionales. Nam quia diſtantiæ AC IL ſunt æquales, erit AB ad incrementum D*s* ut IK ad incrementum MT; unde componendo AB: DC:: IK: ML. Et viciſſim, ſi quatuor numeri ſint proportionales, erit diſtantia inter primum & ſecundum, æqualis diſtantiæ inter tertium & quartum.

Diſtantia inter duos quoſlibet numeros, dicitur Logarithmus rationis iſtorum numerorum, & metitur non quidem ipſam rationem, ſed numerum terminorum in data ſerie Geometrice proportionalium progredientium ab uno numero ad alterum, definitque numerum rationum æqualium, quarum compoſitione efficitur numerorum ratio.

Si diſtantia inter duos quoſvis numeros ſit dupla diſtantiæ inter alios duos numeros; Ratio duorum priorum numerorum erit duplicata rationis poſteriorum. Sit enim diſtantia IL inter numeros IK LM dupla diſtantiæ A*c* quæ eſt inter numeros AB *cd*, biſecta IL in *l* ob A*c* = I*l* = *l*L, erit ratio IK ad *lm* æqualis rationi AB ad *cd*, adeoque ratio IK ad LM quæ eſt duplicata rationis IK ad *lm*, (per *defin.* 10. *El.* 5.) erit etiam duplicata rationis AB ad *cd*.

Similiter ſi diſtantia EL ſit tripla diſtantiæ AC; erit Ratio EF ad LM triplicata rationis AB ad CD. Nam ob diſtantiam triplam, triplo plures erunt proportionales

ab

ab EF ad LM quam ſunt ejuſdem rationis termini ab AB ad CD: at tam ratio EF ad LM, quam ratio AB ad CD, componitur ex rationibus æqualibus intermediis, (per 5. *defin. El.* 6.) Adeoque ratio EF ad LM ex triplo pluribus rationibus compoſita, Triplicata erit rationis AB ad CD. Similiter ſi ſit GL diſtantia quadrupla diſtantiæ A*c*, erit ratio GH ad LM Quadruplicata rationis AB ad *cd*. & ita deinceps.

Numeri cujuſlibet Logarithmus, eſt Logarithmus rationis Unitatis ad ipſum numerum, vel eſt diſtantia inter unitatem & illum numerum. Logarithmi itaque exponunt dignitatem, locum, ſeu ordinem, quem quiſque numerus obtinet ab unitate in ſerie Geometrice proportionalium. Verbi gratia ſi ab unitate ad numerum 10 ſint proportionales numeri 10 000 000 hoc eſt ſi ſit numerus 10 in loco 10 000 000mo; per computationem invenietur, eſſe in eadem ſerie ab unitate uſque ad 2 proportionales terminos numero 3 010 300, hoc eſt numerus binarius ſtabit in loco 3 010300mo. Similiter ab unitate uſque ad 3, invenientur termini proportionales 4 771 213, qui numerus definit locum numeri ternarii. Numeri 10 000000, 3 010300, 4771213. erunt Logarithmi numerorum 10, 2, & 3.

Si primus ſeriei terminus ab unitate dicatur y, erit ſecundus terminus y^2, tertius y^3, &c. cumque ponitur numerus denarius ſeriei terminus 10 100 000^{mus}, erit $y^{10000000} = 10$. Item erit $y^{3010300} = 2$. Item $y^{4771213} = 3$, & ita deinceps.

Omnes itaque numeri erunt poteſtates aliquæ illius numeri, qui eſt ab unitate primus. Et poteſtatum indices ſunt numerorum Logarithmi.

Cum Logarithmi ſint diſtantiæ numerorum ab unitate, ut ſuperius oſtenſum eſt. Erit Logarithmus ipſius unitatis 0, nam unitas non diſtat à ſeipſa. At fractionum Logarithmi ſunt negativi ſeu infra nihil deſcendentes, hi enim in contrariam diſcedunt partem; adeoque ſi numeri ab unitate proportionaliter creſcentes habeant Logarithmos poſitivos, ſeu ſigno + affectos, Numeri ab unitate

ſimiliter decreſcentes, ſeu fractiones habebunt Logarithmos negativos, ſeu ſigno — affectos. Quod verum eſt quando Logarithmi æſtimantur per diſtantias numerorum ab unitate.

At ſi initium capiunt Logarithmi non ab unitate integrali, ſed ab unitate quæ eſt in loco aliquo fractionum decimalium, verbi gratia à fractione $\frac{1}{1\,00000\,00000}$; tunc omnes fractiones hac majores habebunt Logarithmos poſitivos, reliquæ minores, obtinebunt Logarithmos negativos, ſed de hac re plura poſtea dicentur.

Cum in numeris continue proportionalibus D C E F G H I K &c. diſtantiæ C E E G G I &c. ſint æquales, erunt horum numerorum logarithmi A C A E A G A I &c. æquidifferentes, ſeu Logarithmorum differentiæ erunt æquales. Numerorum itaque proportionalium Logarithmi ſunt omnes in progreſſione Arithmetica. Atque hinc oritur vulgaris illa Logarithmorum definitio, viz. Logarithmi ſunt numeri qui proportionalibus adjuncti, æquales ſervant differentias.

In prima quam *Neperus* edidit Logarithmorum ſpecie, poſuit terminorum proportionalium ab unitate primum, tantum ab unitate diſtare, quantum ipſe terminus unitatem ſuperabat. h. e. Si *v n* ſit primus ſeriei terminus ab unitate A B, ejus Logarithmum ſeu diſtantiam A *n* vel B *y* æqualem eſſe voluit ipſi *v y*, ſeu incremento numeri ſupra unitatem, ut ſi *v y* ſit 1, 0000001, ejus Logarithmum A *n* ponebat 0, 0000001, & hinc computatione factâ Numerus Denarius ſeu 10 erit 2302585us ſeriei terminus, qui itaque numerus eſt Logarithmus denarii in hac Logarithmorum forma, & exprimit ejus diſtantiam ab unitate in partibus quarum *v y* vel A *n* eſt una.

At hæc poſitio omnino arbitraria fuit, poteſt enim diſtantia primi termini, ad ipſius exceſſum ſupra unitatem, datam quamvis habere proportionem, & pro varia illa ratione, quæ pro arbitrio ſupponi poteſt, eſſe inter *v y* & B *y*, incrementum primi termini ſupra unitatem & ejuſdem

dem ab unitate diſtantiam, diverſæ provenient Logarithmorum formæ.

Primam hanc Logarithmorum ſpeciem in aliam magis commodam poſtea mutavit *Neperus*, in qua poſuit numerum denarium non eſſe 23025850^{mum} ſeriei terminum, ſed terminum 10000000^{mum}, inque hac Logarithmorum forma, primum incrementum *vy* erit ad diſtantiam B*y* vel A*n*, ut unitas ſeu AB ad fractionem decimalem, 0, 4342994, quæ itaque exponet Longitudinem ſubtangentis AT. *In Fig.* 4ta.

Poſt mortem *Neperi*, vir ſummus Dominus *Henricus Briggius*, immenſo labore, Logarithmorum Tabulas ad hanc formam conſtruxit & edidit. In hiſce tabulis cum logarithmus denarii ſeu ejus diſtantia ab unitate ponatur 1, 0000000, ſintque 1, 10, 100, 1000, 10000 &c. continue proportionales, erunt æquidiſtantes. Quare numeri 100 Logarithmus erit 2, 0000000. millenarii 3, 0000000 & numeri 10000 Logarithmus fiet 4, 0000000 & ita deinceps.

Hinc Logarithmi omnium numerorum inter 1 & 10 incipere debent per 0, ſeu debet eſſe 0 in primo loco verſus ſiniſtram, ſunt enim minores quam Logarithmus numeri 10 cujus initium eſt unitas; & Logarithmi numerorum inter 10 & 100 unitate incipiunt, ſunt enim majores quam 1. 0000000 & minores quam 2. 0000000. Item Logarithmi numerorum inter 100 & 1000 binario incipiunt, ſunt enim majores quam logarithmus numeri 100, quem incipit 2, & minores logarithmo numeri 1000 qui incipit per 3; eodem modo oſtendetur in Logarithmis numerorum inter 1000 & 10000, primam figuram verſus ſiniſtram debere eſſe 3; & in Logarithmis numerorum ab 10000 uſque ad 100000 prima verſus ſiniſtram figura erit 4, & ita deinceps.

Prima cujuſque logarithmi figura verſus ſiniſtram dicitur characteriſtica ſeu index; quia oſtendit altiſſimum ſeu remotiſſimum locum numeri à loco unitatum. v. gr. Si index logarithmi ſit 1, numeri reſpondentis altiſſimus ſeu remotiſſimus verſus ſiniſtram ab unitate locus, erit

locus

locus decadum. Si index 2, remotiſſima numeri reſpondentis figura erit in ſecundo ab unitatum loco, hoc eſt erit centenariorum aliquis. Et index Logarithmi 3 denotat altiſſimam numeri ſui figuram eſſe in tertio ab unitatum loco, & inter millenarios locari.

Logarithmi numerorum omnium qui ſunt in progreſſione decupla aut ſubdecupla, characteriſticis ſeu indicibus ſuis tantum differunt; in reliquis omnibus locis, iiſdem ſcribuntur notis, v. gr. Logarithmi numerorum 17, 170, 1700, 17000. nam cum ſit 1 ad 17, ut 10 ad 170, ut 100 ad 1700, ut 1000 ad 17000; diſtantiæ inter 1 & 17, inter 10 & 170, inter 100 & 1700, inter 1000 & 17000 erunt omnes æquales, ideoque cum diſtantia inter 1 & 17 ſeu Logarithmus numeri 17 ſit 1. 2304489 erit logarithmus numeri 170 = 2. 2304489, & Logarithmus numeri 1700 erit 3. 2304489 ob numeri 100 Logarithmum = 2. 0000000, & ſimiliter ob numeri 1000 Logarithmum = 3. 0000000 Logarithmus numeri 17000 erit 4. 2304489.

Sic etiam numeri 6748. 674,8. 67,48. 6,748. 0,6748, 0,06748. ſunt continue proportionales ſcil. in ratione 10 ad 1, eorum itaque à ſe invicem diſtantiæ æquales erunt diſtantiæ ſeu Logarithmo numeri 10, ſeu æquales 1, 0000000. quare cum Logarithmus numeri 6748 ſit 3, 8291751, reliquorum logarithmi erunt ut in margine.

6748	3,8291751
674,8	2,8291751
67,48	1,8291751
6,748	0,8291751.
0,6748	—1,8291751
0,06748	—2,8291751

In duobus ultimis logarithmis, Indices tantum ſunt negativi, reliquis figuris poſitivis manentibus, adeoque cum reliquæ figuræ addendæ ſunt, ſubtrahendi erunt indices, & vice verſa.

CAPUT

CAPUT II.

De Logarithmorum Arithmetica ubi numeri ſunt integri, vel integri cum decimalibus adjunctis.

QUoniam in multiplicatione, unitas eſt ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum, diſtantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis erit diſtantiæ inter multiplicandum & productum; ſi itaque numerus GH per numerum EF eſſet multiplicandus, diſtantia inter GH & productum debet eſſe æqualis diſtantiæ AE, ſeu Logarithmo multiplicatoris, ſi itaque capiatur GL æqualis AE, erit numerus LM productus, hoc eſt, ſi ad AG logarithmum multiplicandi addatur AE Logarithmus multiplicatoris, ſumma erit logarithmus producti.

In Diviſione Unitas eſt ad diviſorem, ut quotus ad dividendum; adeoque diſtantia inter diviſorem & unitatem æqualis erit diſtantiæ inter dividendum & quotum. Sic ſi LM per EF eſſet dividendus, erit diſtantia EA æqualis diſtantiæ inter LM & quotum, adeoque ſi capiatur LG æqualis EA, ad G erit quotus. Hoc eſt, ſi ab AL logarithmo Dividendi, auferatur GL ſeu AE Logarithmus diviſoris, reſtabit AG Logarithmus quotientis.

Atque hinc adeo, quæcunque operationes in communi Arithmetica perficiuntur multiplicando aut dividendo numeros majores, eæ omnes facilius multo, & expeditius fiunt, per additionem aut ſubductionem Logarithmorum.

Sit exempli gratia numerus 7589 multiplicandus per 6757 addendo Logarithmos ut in margine videre eſt, habetur Logarithmus producti, cujus index 7 monſtrat eſſe in producto ſeptem locos præter unitatum locum; & quærendo in tabulis Logarithmum hunc, vel proxime æqualem, invenio

Log. 3.	8801846
Log. 3.	8297539
Log. 7.	7099385

venio numerum respondentem minorem producto esse 51278000 & numerum producto majorem esse 51279000, quin capiendo differentias adjunctas, & partes proportionales; invenio notas ante-penultimam & penultimam esse 87, in ultimo autem seu in unitatum loco, necessario erit 3, ob septies novem = 63 adeoque verus productus erit 51278873. Si index Logarithmi esset 8 vel 9, ultima vel penultima notæ obtineri non possunt ex tabulis ubi Logarithmi tantum constat 7 figurarum locis præter characteristicam, adeoque ubi opus est, Tabulæ *Ulacquianæ*, in quibus Logarithmi sunt omnes decem notarum; vel *Briggianæ*, in quibus Logarithmi sunt quatuordecim, adeundæ erunt.

Si numerus 78596 dividendus sit per 278, substrahendo Logarithmum divisoris ex Logarithmo dividendi habetur Logarithmus quotientis, cui Logarithmo respondet, Numerus 282,719 qui itaque erit quotiens.

Log. 4. 8954004
Log. 2. 4440448
Log. 2. 4513556

Cum unitas, numerus quilibet assumptus, ejus quadratus, cubus, Biquadratus, &c. sint continue proportionales, eorum à se invicem distantiæ æquales erunt. Manifestum itaque est Quadrati distantiam ab unitate, duplam esse distantiæ radicis ab eadem: distantiam cubi triplam distantiæ radicis suæ, Biquadrati distantiam esse distantiæ radicis suæ ab unitate quadruplam &c. Adeoque si duplicetur logarithmus numeri, dabitur logarithmus Quadrati; si triplicetur, logarithmus cubi; si quadruplicetur, prodit Logarithmus Biquadrati. Et vice versa si Logarithmus numeri alicujus bisecetur, habebitur Logarithmus Radicis quadratæ ejusdem numeri; Quin & ejusdem logarithmi tertia pars erit logarithmus Radicis Cubicæ; & pars quarta Logarithmus Radicis biquadraticæ, & ita deinceps.

Hinc Radicum omnium extractiones facillime perficiuntur, secando Logarithmum in tot partes, quot sunt unitates in indice potestatis. Sic ut habeatur Radix quadrata numeri 5, ejus Logarithmi capiatur pars dimidia

dia 0. 3494850, erit hæc Logarithmus radicis quadratæ numeri 5, ſeu Logarithmus numeri $\sqrt{5}$, cui reſpondet numerus 2, 23606 quam proxime.

CAPUT III.

De Arithmetica Logarithmorum, ubi numeri ſunt Fractiones.

Vide Fig. 3.

QUotieſcunque Fractiones per Logarithmos tractandæ fuerint, ad vitandum laborem addendi unam Logarithmi partem, & ſubducendi alteram, expedit ut Logarithmi incipiant non ab unitate integrali, ſed ab unitate, quæ ſit in decimo vel centeſimo loco fractionum decimalium, v. gr. pone PO eſſe $\frac{1}{100000\ 00000}$ & Logarithmos ab ejus loco incipere. Hæc fractio decies magis diſtabit ab unitate verſus ſiniſtram, quam numerus 10 ab eadem diſtat verſus dextram, ſunt enim Dccem termini proportionales in ratione 10 ad 1 ab unitate uſque ad PO. Adeoque ſi AB ſit unitas, ejus Logarithmus in hac ſuppoſitione non erit 0, ſed erit OA = 10. 0000000, Nam diſtantia denarii ab unitate eſt 1. 0000000, unde diſtantia numeri 10 à PO erit 11. 0000000. Item diſtantia numeri 100 à PO, ſeu ejus Logarithmus à PO incipiens, erit 12. 000 0000 & numeri 1000 Logarithmus ſeu diſtantia à PO erit 13. 000 0000; atque hac ratione Logarithmorum omnium indices augentur numero 10. & Fractiones quarum indices fuerunt — 1, aut — 2, aut — 3 &c. fiunt 9, 8, aut 7 &c.

At ſi Logarithmi incipiunt à loco Fractionis cujus numerator eſt unitas; denominator unitas centum cyphris adjectis (quod faciendum eſt quoties fractiones occurrunt minores quam PO) illa Fractio centies plus diſtabit ab unitate quam 10 ab ea diſtat, adeoque Unitatis Logarithmus habebit Indicem 100. Numeri Denarii Logarithmus Indicem habebit 101. Et numeri centenarii Logarithmo

rithmo congruet Index 102, & ita deinceps Indices omnes augentur numero 100.

Fractionum omnium quæ ſunt majores PO (à quo initium ducitur) Logarithmi erunt poſitivi. Et cum numeri, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. ſunt in continua progreſſione Geometrica, æqualiter à ſe invicem diſtabunt, & eorum proinde Logarithmi erunt æquidifferentes; Adeoque cum Logarithmus denarii ſit 11. 0000000, & unitatis Logarithmus ſit 10. 0000000 erit Logarithmus fractionis $\frac{1}{10}$ = 9. 0000000; & fractionis $\frac{1}{100}$ Logarithmus erit 8, 0000000; & ſimiliter index Logarithmi numeri $\frac{1}{1000}$ erit 7. Quin etiam eadem ratione ſi index Logarithmicus Unitatis ſit 100 & denarii 101, Erit index Logarithmi Fractionis $\frac{1}{10}$, 99, & Fractionis $\frac{1}{100}$ Index Logarithmi erit 98; & Fractionis $\frac{1}{1000}$ index Logarithmicus erit 97 &c. Hi indices oſtendunt in quo loco ab unitate prima fractionis figura quæ cyphra non ſit, ponenda fuerit. v. gr. Si index ſit 4 ejus differentia ab indice unitatis quæ eſt 10 ſcil. 6 oſtendit primam decimalis figuram ſignificativam eſſe in 6to ab unitate loco; ergo quinque cyphræ verſus ſiniſtram ei præponendæ ſunt. Ita ſi Unitatis index ſit 100 & fractionis index ſit 80, erit prima ejus figura in viceſimo ab unitatis loco ſeu 19 cyphræ præponendæ erunt.

Sit jam Fractio GH per fractionem DC multiplicanda. Quia unitas eſt ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum; erit diſtantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis diſtantiæ inter multiplicandum & productum. Quare ſi capiatur GI = AC, ad I erit productus IK. Et proinde ſi ab OG Logarithmo multiplicandi, auferatur GI vel AC, reſtabit OI Logarithmus producti. Eſt vero AC = OA − OC, quæ ablata ab OG, relinquetur OG + OC − OA = OI, hoc eſt, ſi ſimul addantur Logarithmi multiplicatoris & multiplicandi, & è ſumma auferatur Logarithmus unitatis (qui ſemper ſcribitur per 10 aut 100 cum cyphris) habebitur logarithmus producti. ex. gr. Sit Fractio decimalis 0,00734 per fractionem 0,00876 multiplicanda, pono unitatis indicem Logarithmicum eſſe 100, & fractionum Logarithmi erunt

ut

ut in margine, qui additi, & rejecto Logarithmo Unitatis, dant Logarithmum producti, cujus index 94 oſtendit primam producti figuram eſſe in ſexto ab unitatum loco, quinque itaque cyphræ præponendæ ſunt, & productus erit ,00000642984.

	97, 8656961
	96, 9425041
	94, 8082002

In Diviſione, Diviſor eſt ad unitatem, ut dividendus ad quotum, & proinde diſtantia inter diviſorem & unitatem, æqualis erit diſtantiæ inter dividendum & quotum. Itaque ſi fractio IK dividenda eſſet per DC, capienda erit IG = CA & locus quoti erit G. Eſt vero CA = OA — OC quæ ad OI addita fit OA + OI — OC = OG. hoc eſt ſi addatur Logarithmus unitatis ad Logarithmum dividendi, & è ſumma auferatur Logarithmus diviſoris, reſtabit logarithmus quotientis; ſic ſi numerus CD per IK eſſet dividendus, capienda erit diſtantia CS = IA, & erit ST quotiens; cujus Logarithmus eſt OA + OC — OI. Sit CD = 0, 347 IK = 0, 00478. ad logarithmum ipſius CD addatur Logarithmus Unitatis, hoc eſt ejus Indici præponatur 1 aut 10, & ex eo ſubducatur logarithmus diviſoris, reſtabit Logarithmus quotientis, cujus index 11 monſtrat quotientem eſſe inter numeros qui ſunt à 10 ad 100. quæro itaque numerum logarithmo reſpondentem, quem invenio eſſe 72 ,594. Si fractionis vulgaris verbi gr. $\frac{7}{8}$ logarithmus deſideretur, ad Logarithmum numeri 7 addatur Logarithmus unitatis, vel quod idem eſt, ejus indici præponatur 1 aut 10 & ſubducatur ab eo logarithmus denominatoris 8, reſtabit logarithmus fractionis $\frac{7}{8}$ vel fractionis decimalis ,875.

	19, 5403295
	7, 6794279
	11, 8609016
	10, 8450980
	0, 9030900
	9, 9420080

Ut Fractionis cujuſlibet DC poteſtates habeantur, Capiendæ ſunt EC EG GI IL ſingulæ æquales AC, & EF erit quadratus, GH Cubus, IK biquadratus numeri DC, ſunt enim ab unitate continue proportionales. Eſt præterea AE = 2 AC = 2 OA — 2 OC, unde OE = OA — AE = 2 OC — OA, hoc eſt logarithmus quadrati

drati eſt duplus logarithmi radicis, minus Logarithmo unitatis. Similiter ob AG = 3 AC = 3 OA — 3 OC erit OG = OA — AG = 3 OC — 2 OA = Logarithmo cubi = Triplo Logarithmi lateris minus duplo logarithmi unitatis. Eadem ratione, quia AI = 4 AC = 4 OA — 4 OC, erit OI = 4 OC — 3 OA; qui eſt Logarithmus Biquadrati. Et univerſaliter fractionis poteſtas ſit *n*, logarithmus L, erit logarithmus poteſtatis *n* = *n* L — *n* OA + OA. hoc eſt multiplicando logarithmum fractionis per *n*, & è producto abjiciendo logarithmum unitatis multiplicatum per *n* — 1, habebitur logarithmus poteſtatis *n* ejuſdem fractionis.

Ex. gr. ſit Fractio $\frac{1}{20}$ = ,05 cujus quæratur poteſtas 6ta; hujus fractionis logarithmus eſt 8, 6989700 qui multiplicatus per 6 dat numerum 52, 1938200, & ex 52 ablato numero 50 qui eſt index Logarithmi unitatis in 5 ductus, reſtabit logarithmus poteſtatis 6tæ ſcil. 2, 1938200 cui reſpondet numerus 0 ,00 0000 15625. nam index 2 oſtendit ſeptem cyphras primæ figuræ præponendas eſſe.

Si Fractionis ,05 poteſtas octava deſideretur, multiplicando logarithmum per 8, prodit 69, 5917600, at cum ex numero 69 auferri non poteſt 70, qui eſt ſepties index logarithmi unitatis, quin in numeros negativos deveniatur, pono indicem logarithmi unitatis eſſe 100. & index logarithmicus fractionis, erit 98. hic logarithmus in 8 ductus dat 789. 5917600 & ex numero 789 rejecto numero 700, qui utpote cum cyphris annexis, eſt ſepties logarithmus unitatis, reſtabit 89. 5917600 logarithmus poteſtatis 8væ Fractionis $\frac{1}{20}$ cui congruens numerus eſt ,00000 00000 39062, nam cum Index ſit 89 & ejus differentia ab 100 eſt 11; figura prima fractionis ſignificativa erit in undecimo ab unitatis loco, adeoque decem cyphræ præponendæ erunt.

Si in fractionibus, radices poteſtatum deſiderentur. v. gr. Fractionis EF, quæratur radix quadrata. Quoniam Radix eſt media proportionalis inter Fractionem & unitatem; biſectâ AE in C, erit CD radix quadrata fractionis

ctionis E F. Eſt vero $AC = \frac{1}{2}AE = \frac{OA - OE}{2}$, Adeoque O C Logarithmus Radicis $= OA - AC = \frac{OA + OE}{2}$.

Si fractionis G H radix cubica quæratur; Radix illa erit prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & G H, ſecetur itaque A G in tres partes æquales, quarum prima ſit A C, erit C D radix quæſita, & quoniam eſt $AC = \frac{1}{3}AG = \frac{OA - OG}{3}$ ſi hæc ſubducatur ab O A, reſtabit $\frac{2OA + OG}{3} = OC$ ſcil. Logarithmo Radicis cubicæ fractionis G H. Sic etiam fractionis I K radix biquadratica habetur, ſecando A I in quatuor partes æquales. Nam Radix eſt prima trium mediarum proportionalium inter unitatem & Fractionem. Sit itaque $AC = \frac{1}{4}AI$, & erit C D Radix biquadratica Fractionis I K. Sed eſt $\frac{1}{4}AI = \frac{OA - OI}{4}$ adeoque $OC = OA - AC = \frac{3OA + OI}{4}$.

Univerſaliter ſi fractionis L M deſideretur radix poteſtatis n, ejus radicis Logarithmus erit $\frac{nOA - OA + OL}{n}$, hoc eſt ſi indici Logarithmico fractionis, præponatur numerus $n - 1$, & logarithmus ſic auctus dividatur per n, quotus dabit Logarithmum radicis quæſitæ. Sic ſi quæratur radix cubica fractionis $\frac{1}{2}$ ſive ,5 hujus Logarithmo præponatur $2 = n - 1$, quia radix cubica deſideratur, & fiet 29. 6989700 cujus numeri triens eſt 9, 8996566 æqualis Logarithmo radicis cubicæ fractionis $\frac{1}{2}$ & congruens Logarithmo numerus eſt ,7937 qui erit radix quæſita.

CAPUT

CAPUT IV.

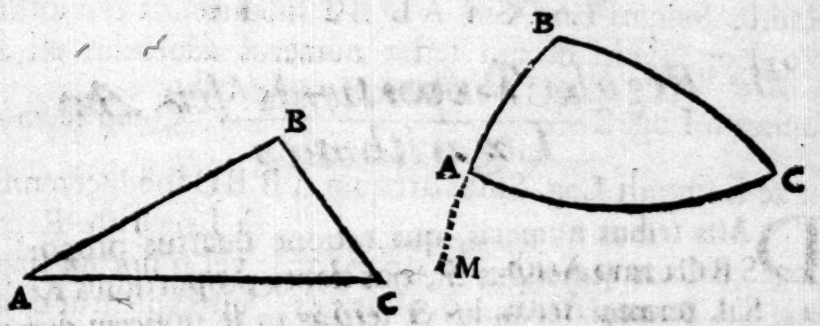
De Regula Proportionis seu Aurea Logarithmica.

DAtis tribus numeris, qua ratione quartus proportionalis inveniendus sit, nos docet proportionis Regula; scil. termini secundus & tertius in se invicem ducendi sunt, & productus dividendus est per primum, qui prodit quotus, exhibebit quartum terminum proportionalem quæsitum. At per logarithmos minore labore habebitur ille quartus; Nam si è summa Logarithmorum secundi & tertii auferatur logarithmus primi, qui restat numerus est logarithmus quarti proportionalis.

Quin etiam & hic labor minui aliquantulum potest, si loco logarithmi primi capiatur ejus complementum Arithmeticum, seu differentia logarithmi à numero 10 0000000, & obtinetur si pro singulis logarithmi figuris scribantur earum differentiæ à 9, Complementum hoc Arithmeticum cum reliquis duobus logarithmis in unam summam conjiciatur, & è summa, unitatis nota in primo versus siniſtram loco sita abjiciatur, restabit logarithmus quarti termini quæsiti; atque hoc modo per unicam Numerorum trium additionem invenitur logarithmus termini quæsiti. Hujus rei causa hinc patebit. Sint tres numeri A B C & è summa secundi & tertii subducendus est primus, non tantum operatio communi modo perficitur, sed etiam si assumatur numerus quivis E, & ab ea auferatur A, restabit E — A si numeri B C & E — A in unam summam addantur, & è summa trium rejiciatur E, restabit B + C — A. sic si subducendus est numerus 15 ex 23 capio numeri 15 complementum ad 100 quod est 85, hunc numerum addo ad 23 & summa fit 108 ex quo sublato 100 restabit numerus 8. sequuntur Exempla Trigonometrica Regulæ proportionis per Logarithmos soluta.

85
23
108

Sit



Sit Triangulum A B C rectilineum, in quo dantur angulus A 36 gr. 46′. angulus B 98 gr. 32′. & latus B C, 3478. & quæritur latus AC. Fiat (per *caſ.* 1. Trigon. Planæ) Sinus ang. A ad Sinum ang. B ut B C ad A C. Et quia Log. ſinus anguli A eſt primus analogiæ terminus ejus vice ſubſtituo complementum Arithmeticum ejuſdem, & addo Log. B C, Log. S, B & prædictum complementum in unam ſummam, & è ſumma rejecta unitate quæ eſt in primo verſus ſiniſtram loco, dabitur Logarithmus lateris A C, cui congruens numerus eſt 5746, 309 æqualis A C lateri quæſito.

Arith. comp. S. A.		0. 2228940
Log. Sin. B.		9. 9951654
Log. B C		3. 5413296
Log. A C.		13. 7593890

Sit Triangulum Sphæricum A B C, in quo dantur omnia latera ſcil. B C = 30 grad. A B = 24 gr. 4′. & A C = 42 gr. 8′. quæritur angulus B. Producatur B A ad M ut ſit B M = B C erit A M differentia laterum B C B A æqualis 5 gr. 56′. (Per *caſ.* 11. in Triangulis obliquangulis Sphæricis.) Fiat ut rectangulum ſub ſinubus crurum A B B C ad quadratum Radii ita Rectangulum ſub ſinubus Arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ $\frac{AC-AM}{2}$ ad quadratum ſinus anguli $\frac{1}{2}$ B.

Eſt vero $\frac{AC+AM}{2}$ = 24 gr. 2′. & $\frac{AC-AM}{2}$ = 18 gr. 6′. Et quia primus analogiæ terminus eſt rectangulum

ſub ſinubus A B B C, & ſecundus terminus eſt quadratum Radii; Summa Log. Sin. A B B C ſubducenda erit ex duplo Log. Radii & qui reſtat numerus addendus eſt ad ſummam Log. $S\frac{AC+AM}{2}\frac{AC-AM}{2}$. Quod idem erit ac ſi ſinguli Log. Sinus arcuum A B B C ſubducerentur à Logarith. Radii, vel ſi horum ſinuum capiantur complementa Arithmetica, Atq; complementa illa & prædicti ſinus in unam conjicerentur ſummam. Summa illa erit Logarithmus quadrati ſinus dimidii anguli B. Logarithmi itaque dimidium 9. 8963860 eſt Log. Sinus anguli $\frac{1}{2}$ B = 51 gr. 58′. 31″. & hujus anguli duplum erit 103 gr. 57′. 02″ = angulo E qui erat inveniendus.

Log. S, B C comp. Arith.	0. 3010300
Log. S, A B comp. Arith.	0. 3895535
Log. $S\frac{AC+AM}{2}$	9. 6098803
Log. $S,\frac{AC-AM}{2}$	9. 4923083
2 Log. S, Ang. B.	19. 7927721

CAPUT V.

De Proportionalium Quantitatum continuis Incrementis, Et de modo inveniendi per Logarithmos, Terminum quemlibet in ſerie Proportionalium, ſive creſcente, ſive decreſcente.

SI in Axe Logarithmicæ ubivis capiantur partes quot volueris S V V Y Y Q &c. æquales, & ad puncta S V Y Q &c. erigantur perpendiculares S T V X Y Z Q Π &c. ex natura curvæ, erunt omnes continuè proportionales; quin etiam continua incrementa X x Z z Π π erunt totis proportionalia. Nam ob S T : V X :: V X : Y Z :: Y Z : Q Π erit dividendo *Vide Fig. 3.*

videndo ST : Xx :: VX : Zz :: YZ : $\Pi\pi$, & componendo VX : Xx :: YZ : Zz :: QΠ : $\Pi\pi$. Hinc ſi Xx ſit pars quælibet rectæ ST, erit Zz eadem pars rectæ VX, & $\Pi\pi$ quoque eadem pars rectæ YZ. ex. gr. Si Xx ſit $\frac{1}{20}$ ST, erit Zz = $\frac{1}{20}$ VX, & $\Pi\pi$ = $\frac{1}{20}$ YZ; ſeu quod eodem redit, erit VX = ST + $\frac{1}{20}$ ST. YZ = VX + $\frac{1}{20}$ VX, item QΠ = YZ + $\frac{1}{20}$ YZ.

Fiat ut ST ad VX, ita AB unitas ad NR; erit AN = SV; adeoque rectæ SV VY YQ &c. erunt ſingulæ æquales logarithmo ipſius RN, & AV Logarithmus termini VX erit æqualis AS + AN = Logarithmo ipſius ST + Logarithmo ipſius NR. Item AY Logarithmus termini YZ æqualis erit AS + 2 AN = Log. ST + 2 Log. NR, & AQ logarithmus Termini QΠ æqualis erit AS + 3 AN = Log. ST + 3 Log. NR. Et univerſaliter ſi Logarithmus numeri NR multiplicetur per numerum, qui exprimit termini cujuſvis diſtantiam à termino primo, & productus addatur Logarithmo termini primi, dabitur logarithmus iſtius termini. At ſi ſeries proportionalium ſit decreſcens; ſeu ſi termini in continua ratione minuantur, & QΠ ſit primus, habebitur Logarithmus alterius cujuſvis termini, multiplicando Logarithmum numeri NR per numerum qui exponit ejus termini diſtantiam à primo, & ſubducendo productum è Logarithmo primi. Quod ſi productus ille ſit major Logarithmo primi termini initio ab unitate ducto; in eo caſu ponendi ſunt Logarithmi incipere ab unitate in aliquo fractionum Decimalium loco detrusâ, verbi gratia ab OP ita Logarithmus numeri QΠ erit OQ.

Exponat jam LM quamvis pecuniam, ſeu pecuniæ ſummam à creditore Fœnori elocatam, ea lege ut ſingulis annis Uſura annua ſorti annumeretur, & finito primo anno, ſit uſura ſeu lucrum Kk, & IK aggregatum ſortis & lucri pariat uſuram *Hh* quæ ſit ipſi IK proportionalis, ſeu in ratione conſtanti. Hæc uſura Hh finito anno ſecundo, ſorti accedat, & ſors ea ſit GH, quæ ad finem anni tertii pariat uſuram Ff, ipſi GH proportionalem; Ponamus ſortem ſingulis annis augeri parte ſui viceſima,

ſima, $\frac{1}{20}$, adeoque erit $IK = LM + \frac{1}{20} LM$, $GH = IK + \frac{1}{20} IK$. $EF = GH + \frac{1}{20} GH$, & ita deinceps. Erunt proinde termini LM IK GH EF &c. continue proportionales. Quæritur quantum aucta fuerit pecunia ad finem quotlibet annorum.

Sit LM ſemiobolus, Anglice *A farthing*. Ob LM ad IK ut 1 ad $1 + \frac{1}{20}$ vel ut 1 ad 1,05. ut AB ad NR, erit NR = 1,05, cujus Logarithmus AN eſt 0. 0211893, vel magis accurate 0. 0211892991. Quæritur quantum lucri accedat ſemiobolo, qui ſexcentis annis fænori expoſitus eſt. Multiplicetur AN per 600 productus erit 12. 7135794. Huic producto addatur Logarithmus fractionis $\frac{1}{960}$ nempe 97, 0177288. (nam eſt ſemibolus pars libræ $\frac{1}{960}$) ſumma 109. 7313082 erit Logarithmus numeri quæſiti, cumque index 109 ſuperat indicem Unitatis novenario ſeu 9, erunt in numero reſpondente novem figurarum loca ſupra locum Unitatum, & numerus ille in tabulis quæſitus invenietur major quam 5386500000, & minor quam 5386600000. Unus itaque ſemiobolus fænori datus, finitis ſexcentis Annis, pariet libras Anglicanas plures quam 5386500000; Cui ſummæ ſolvendæ vix par erit omnis illa Auri Argentique copia, quæ ab ipſa rerum origine ad hunc uſque diem ex terrarum viſceribus eruta eſt.

Exponat Q Π quamvis pecuniæ ſummam quam poſt exactum integrum annum debitor creditori ſolvere tenetur, ſed ſine uſurâ. Certum eſt ſi Debitor nunc totam ſolveret, illum amiſſurum jus quod habet in uſuram annuam quæ ex pecunia illa prodiret; Quin & minor ſumma fœnori expoſita, poteſt poſt annum cum ſua uſura, ſummam Q Π adæquare. Minor illa pecuniæ ſumma, quæ cum ſua Uſura pecuniam Q Π adæquat, præſens pecuniæ Q Π valor dicitur. Sit AN Logarithmus Rationis quam ſors habet ad aggregatum ſortis & uſuræ, hoc eſt, ſi ſors ſit Uſuræ annuæ Vigecupla, ſit AN Logarithmus numeri $1 + \frac{1}{20}$ ſeu 1, 05, & capiatur QY æqualis AN; erit AY Logarithmus præſentis valoris pecuniæ Q Π. Patet enim pecuniam YZ fœnori expoſitam finito anno parituram pecuniam Q Π, adeoque ut habeatur logarithmus præſentis valoris,

valoris, ſeu YZ; ex Logarithmo AQ detrahi debet Logarithmus AN, & reſtabit AY logarithmus præſentis valoris, vel YZ. Si ſumma Qπ non niſi poſt duos annos exactos debeatur; à logarithmo AQ ſubtrahendus eſt numerus 2 AN, & manebit AV logarithmus præſentis valoris, ſeu ſummæ quæ pro pecunia Qπ ſolvi ſtatim debeat. Nam manifeſtum eſt pecuniam VX fœnori expoſitam, ſpatio duorum annorum, pecuniam Qπ procreaturam. Eadem ratione, ſi ſumma Qπ non niſi poſt tres annos debetur, à logarithmo Qπ ſubtrahendus erit numerus 3 AN, & qui reſtat AS, erit logarithmus numeri ST, ſeu erit ST præſens valor ſummæ Qπ poſt tres annos ſolvendæ. Et univerſaliter, ſi logarithmus AN multiplicetur per numerum annorum, quibus exactis debetur ſumma Qπ, & productus numerus ex logarithmo AQ ſubducatur, hac ratione dabitur logarithmus numeri, qui erit præſens valor ſummæ Qπ. Hinc patet ſi 5386500000 libræ Angl. ſocietati alicui finitis ſexcentum annis ſolvendæ fuerint; tantæ pecuniæ præſentem valorem, vix unum ſemiobolum adæquaturum.

Si in axe Logarithmicæ ordinentur ad curvam rectæ HG EF, AB CD quæ ſint proportionales, & extremitates ipſarum FH DB rectis jungantur, quæ productæ cum Axe conveniant in P & K, erunt rectæ GP AK ſemper æquales. Nam ob GH : EF :: AB : CD. erit GH : Fs :: AB : DR. Sed ob æquiangula triangula PGH HsF, Item KAB BRD æquiangula erit PG : Hs :: (GH : Fs :: AB : DR ::) KA : BR. Quarum proportionalium conſequentes Hs BR æquales ſunt, Antecedentes igitur PG KA æquales erunt. Q.E.D. *Fig.* 4.

Si rectæ CD EF ad AB GH æqualiter accedant, ut tandem punctum D coincidat cum B, & punctum F cum H, rectæ DBK FHP quæ prius ſecabant curvam, vertentur in Tangentes BT, HV; & rectæ AT GV ſemper ſibi invicem æquales erunt, hoc eſt, portio Axis AT vel GV intercepta inter ordinatam & Tangentem quæ Subtangens dicitur, erit ubique conſtantis & datæ longitudinis quæ eſt præcipua Logarithmicæ Proprietas. Nam

in diverſis logarithmicis, ſubtangentes curvarum ſpecies ſeu formas determinabunt.

In duabus diverſæ ſpeciei logarithmicis, ejuſdem numeri logarithmi, ſeu diſtantiæ ab unitate, erunt ſubtangentibus ſuarum curvarum proportionales. Sint enim curvæ HBD SNY, quarum ſubtangentes ſint AT MX, ſitque AB = MN = unitati, item DC = QY; erit AC logarithmus numeri CD, in logarithmica HD, ad MQ logarithmum numeri QY, ſeu ejuſdem CD in logarithmica SY, ut ſubtangens AT ad ſubtangentem MX. Concipiatur interſeri inter AB CD vel MN QY, infinitos terminos continue proportionales, in ratione AB ad *ab* vel MN ad *mn*; & ob AB = MN erit *ab* = *mn*. item erit *bc* = *no*. Et termini proportionales cum in utraque figura ſint numero æquales, divident lineas AC MQ in partes numero æquales, quarum primæ ſint A*a* M*m*, partes itaque illæ erunt totis proportionales, hoc eſt, erit A*a*: M*m* :: AC : MQ. Quoniam autem triangula TAB B*c b* ſunt ſimilia (nam pars curvæ B*b* coincidet fere cum portione tangentis) item triangula XMN, N*o n* ſunt ſimilia. Erit A*a* vel B*c* : *bc* :: TA : AB

Fig. 4. & 5.

Item eſt *no* vel *bc* : N*o* : MN vel AB : MX.

Unde erit ex æquo, B*c* : N*o* :: TA : MX :: A*a* : M*m* :: AC : MQ. Q.E.D. Si AT vocetur *a*, ob AB : AT :: *bc* : B*c*; erit $Bc = \frac{a \times bc.}{AB}$

Hinc ſi detur logarithmus numeri, qui ſit unitati proximus, vel illam minimo exceſſu ſuperat, dabitur logarithmicæ ſubtangens, eſt enim exceſſus *bc* ad logarithmum B*c* ut AB unitas ad ſubtangentem AT. Vel etiam ſi ſint duo quilibet numeri quam proxime æquales, erit differentia numerorum ad differentiam logarithmorum, ut alteruter numerorum ad ſubtangentem. v. gr. Si incrementum *bc* ſit ,00000 00000 ,00001 02255 31945 60259, & B*c* vel *Aa* logarithmus numeri *ab* ſit ,00000 00000 00000 44408 92098 50062. duobus his numeris & unitati inveniatur quartus proportionalis, ſcilicet

43429

43429 44819 03251, is numerus dabit longitudinem ſubtangentis AT, quæ eſt ſubtangens logarithmicæ quæ exhibet logarithmos *Briggianos*.

Si Creditor Pecuniæ ſummam fœnori exponat, ea lege, ut ſingulis temporis momentis, pars proportionalis uſuræ annuæ ſorti annumeretur, ita ſcil. ut poſt finitum primum temporis momentum, ſeu exactam anni particulam indefinite exiguam, uſuram poſcat tempori proportionalem, quæ ſorti adjecta, unà cum ipſa, uſuram pariat, finito ſecundo temporis momento, ſorti pariter acceſſuram, & ita deinceps. Quæritur quantum creditori finito anno debeatur? Sit a uſura annua Unitatis, ſeu unius libræ. & ſi integer annus ſeu 1 dat uſuram a, particula anni indefinite exigua Mm dabit uſuram ipſi Mm proportionalem $Mm \times a$; & proinde ſi Unitas per MN exponatur, ejus incrementum primum erit $no = Mm \times a$. Per puncta Nn concipiatur logarithmica deſcribi, cujus Axis eſt OMQ. In hac curva, ſi portio Axis MQ tempus exponat, ordinata QY pecuniam repræſentabit quæ uſque ad illud tempus, ſingulis momentis, proportionaliter crevit. Nam ſi capiantur ml &c. $= Mm$, ordinatæ lp &c. erunt in ſerie continue proportionalium in ratione MN ad mn, id eſt creſcent eâdem ratione, qua pecunia creſcit.

Tangat logarithmicam in N recta NX, ejus ſubtangens MX erit conſtans & invariabilis, & triangulum minimum Non ſimile erit triangulo XMN. At oſtenſum eſt, eſſe incrementum $no = Mm \times a = No \times a$ erit itaque $no : No :: No \times a : No :: a : 1$. Sed ut no ad No, ita erit NM ad MX. Quare erit, ut a ad 1, ita NM ſeu 1 ad

$MX = \frac{1}{a}$ ſubtangenti.

Quod ſi Uſura annua ſit pars ſortis viceſima, ſeu ſi ſit $a = \frac{1}{20} = ,05$, erit $MX = \frac{1}{a} = 20$.

Quia in diverſis logarithmorum formis, ejuſdem numeri logarithmi ſunt ſubtangentibus ſuarum curvarum, pro-

proportionales: ſi MQ tempus Annuum, ſeu unitatem, exponat; QY erit pecunia quæ finito anno debetur. Ut verò innoteſcat QY; Fiat ut MX ſeu 20 ad 0, 4342944 (qui numerus exponit ſubtangentem logarithmicæ, quæ exhibet logarithmos *Briggianos*) ita annus, ſive unitas, ad logarithmum *Briggianum*, qui numero QY congruit; logarithmus autem ille invenietur 0. 0217147 cui reſpondens numerus = QY eſt 1 ,05127, cujus incrementum ſupra unitatem ſive ſortem ,05127 pauxillum ſuperat annuam uſuram ,05. Adeo ut ſi uſura annua centum librarum ſit quinque libræ, uſura proportionalis ſingulis anni momentis ſorti 100 adjecta, pariet tantum ad finem anni, *lib. ſol. d.*

5 : 2 : 6 $\frac{1}{2}$

Si quæratur uſura ejuſmodi, ut ſingulis momentis pars ipſius ſorti continue creſcenti proportionalis, ad ſortem accedat ea lege ut finito anno producat incrementum quod ſit ſortis pars quælibet data v. gr. viceſima. Fiat ut log. numeri 1, 05 ad 1, hoc eſt ut 0, 0211893 ad 1; ita ſubtangens 0, 4342944 ad $\frac{1}{a}$ = 20,49, & erit $a = \frac{1}{20,49}$ = ,0488. Nam ſi concipiatur pars uſuræ ,0481 momento reſpondens, hoc eſt eandem habens rationem ad ,0488 quam habet momentum ad annum, & fiat ut unitas ad illam uſuræ partem, ita ſors ad ejus incrementum momentaneum; quæ hac ratione continuò creſcit pecunia, ad finem anni augebitur viceſima ſui parte.

CAPUT VI.

De Methodo qua Henricus Briggius *Logarithmos ſuos ſupputavit, ejuſque Demonſtratio.* *Vide Fig.* 4.

QUamvis *Briggius* lineam Logarithmicam nuſquam deſcripſit, quem tamen in calculo adhibuit operandi modum, modique Rationem ex contemplatione Logarithmicæ

micæ evidentiſſime patebit. In qualibet Logarithmica HBD ſint tres ordinatæ AB *a b q s* quam proxime æquales, hoc eſt earum differentiæ exiguam admodum ad ipſas lineas habeant rationem; Erunt Logarithmorum differentiæ differentiis linearum proportionales. Nam cum lineæ ſunt quam proxime æquales, propinquiſſime ſibi invicem erunt, & pars curvæ B *s* ab iis intercepta cum recta linea fere coincidet, certe tam prope poſſunt ordinatæ ſibi invicem admoveri, ut differentia curvæ, à recta ipſam ſubtendente, habeant ad ipſam ſubtenſam, minorem qualibet datâ rationem. Triangula igitur B *c b* B *r s* pro rectilineis aſſumi poſſunt, & erunt æquiangula. Quare eſt *s r*: *b c* :: B *r*: B *c* :: A *q*: A *a*: hoc eſt exceſſus linearum ſupra minimam AB, erunt logarithmorum differentiis proportionales. Hinc patet ratio iſtius methodi qua tam numeri quam Logarithmi per differentias & partes proportionales corriguntur. Quod ſi AB ſit unitas, erunt numerorum logarithmi differentiis numerorum proportionales.

Si intra numeros denarium & unitatem capiatur medius proportionalis, ſeu quod idem eſt, numeri denarii extrahatur Radix quadratica, Radix illa ſeu numerus in medio erit loco intra denarium & Unitatem. & ejus Logarithmus erit dimidius Logarithmi qui denario competit ac proinde dabitur. Si inter numerum prius inventum & unitatem, iterum inveniatur medius proportionalis quod fit extrahendo numeri inventi Radicem quadraticam, hic numerus Unitati duplo vicinior erit quam prior, ejuſque logarithmus erit prioris logarithmi ſemiſſis, ſeu Logarithmi denario competentis pars quarta. Si hac ratione continuo extrahatur Radix quadratica & biſecentur Logarithmi, pervenietur tandem ad numerum cujus diſtantia ab unitate minor erit parte $\frac{1}{1\,00000\,00000\,00000}$ iſtius logarithmi qui Denario tribuitur. *Briggius* peractis 54 Radicum extractionibus; Invenit numerum 1, 00000 00000 00000 12781 91493 20032 3442 ejuſque logarithmum fore 0, 00000 00000 00000 05551 11512 31257 82702.

ſuppo-

ſupponatur Logarithmus hic æqualis A *q* ſive B *r*, & ſit *q s* numerus radicum extractione inventus; erit differentia *r s* qua unitatem ſuperat = ,00000 00000 00000 12781 91493 20032 35.

Horum numerorum ope, logarithmi reliquorum omnium inveniri poterunt ad hunc modum. Inter datum numerum (cujus logarithmus inveniendus ſit) & unitatem quærantur (ut ſuperius oſtenſum eſt) medii proportionales, donec tandem inveniatur numerus tantillo unitatem ſuperans ut unitas præcedat quindecim cyphras, quas totidem vel plures notæ ſignificativæ ſequantur. Sit numerus ille *ab*, & notæ ſignificativæ, præfixis cyphris differentiam *b c* denotabunt. Deinde fiat ut differentia *r s* ad differentiam *b c* ita B *r* Logarithmus datus ad B *c* vel A *a* Logarithmum numeri *a b*; qui itaque dabitur. Hic Logarithmus toties continue duplicatus quoties extractiones factæ ſunt, tandem dabit Logarithmum numeri quæſiti. Hac etiam ratione Inveniri poſſit Subtangens Logarithmicæ nempe ſi fiat *r s* : B *r* :: AB ſeu unitas: AT ſubtangenti, quæ itaque invenietur 0, 43429 44819 03251, per quam denique reliquorum numerorum logarithmi innoteſcent, nempe ſi detur numerus quivis NM ejuſque Logarithmus & quæratur alterius numeri logarithmus qui ad NM ſatis accedat, fiat ut NM ad ſubtangentem XM ita *n o* differentia numerorum ad N*o* differentiam Logarithmorum. Quod ſi NM ſit Unitas = AB dabuntur logarithmi multiplicando differentias minimas *b c* per ſubtangentem conſtantem AT.

Fig. 5.

Hac ratione Invenientur Logarithmi numerorum 2 3 & 7, & inde dabuntur Logarithmi numerorum 4 8 16 32 64 &c. 9 27 81 243 &c. item 7 49 343 &c. Si à logarithmo denarii auferatur binarii Logarithmus reſtabit logarithmus Quinarii. & proinde dabuntur Logarithmi numerorum 25 125 625 &c.

Numeri ex his compoſiti, nempe 6 12 14 15 18 20 21 24 28 &c. facile logarithmis ſuis inſtruuntur, addendo logarithmos numerorum componentium.

At numerorum primorum logarithmos, per tot Radicum

cum extractiones invenire, moleſtum admodum & laborioſum fuit opus. Nec quidem facile fuit, interpolando per differentias Primas, Secundas, & Tertias &c. Logarithmos ſupputare. Quo itaque abſque tanta moleſtia Numerorum logarithmi obtineantur, Magni viri *Newtonus*, *Mercator*, *Gregorius*, *Walliſius*, & nuper *Halleius* ſeries infinitas convergentes dederunt, quibus expeditius & certius logarithmi, ad quot volueris loca ſupputati haberi poſſunt; De hiſce ſeriebus, eruditum Tractatum ſcripſit peritiſſimus Geometra *Halleius* inter Acta Philoſophica Societatis Regiæ extantem, ubi ſeries illas nova methodo demonſtrat, modumque computandi logarithmos per eas docuit. Liceat hic ſubjungere novam ſeriem, ex qua expedite & facile fluunt Logarithmi ſaltem pro numeris majoribus.

Sit z numerus impar, cujus quæritur Logarithmus, Numeri $z-1$ $z+1$ erunt pares, & proinde dabuntur eorum logarithmi, & Logarithmorum differentia, quæ dicatur y; Quin etiam datur Logarithmus numeri qui eſt medius Geometricus inter numeros $z-1$ & $z+1$ æqualis ſcil. ſemiſummæ logarithmorum. Series $y \times \frac{1}{4z} + \frac{1}{24z^3} + \frac{7}{360z^5} + \frac{181}{15120z^7} + \frac{13}{25200z^9}$ &c. erit æqualis logarithmo Rationis quam habet Geometricus medius inter numeros $z-1$ & $z+1$ ad Arithmeticum medium ſcil. numerum z.

Si Numerus ſuperat 1000, Primus ſeriei terminus $\frac{y}{4z}$ ſufficit ad producendum logarithmum ad tredecim vel quatuordecim notarum loca, ſecundus terminus dabit logarithmi loca viginti. At ſi z major ſit quam 10000, primus terminus Logarithmum exhibet ad octodecim figurarum loca, & hinc ejus uſus optimus erit, in ſupplendis logarithmis Chiliadum à *Briggio* prætermiſſis; Hujus rei capiamus exemplum, ſit inveniendus logarithmus numeri 20001. Logarithmus numeri 20000 idem eſt ac logarithmus

mus binarii præfixo Indice 4. & differentia Logarithmorum 20000 & 20002, idem eſt ac differentia Logarithmorum pro numeris 10000 & 10001, ſcil. 0, 00004 34272 7687. Hæc differentia ſi per 4 z ſeu 80004 dividatur

Quotiens $\frac{y}{4z}$ erit — — — 0, 00000 00005 42813

4, 30105 17093 02416

Huic quoto addatur log. numeri Geometrici medii, ſumma 4, 30105 17098 45230

erit Logarithmus numeri 20001. Hinc patet, ut habeatur logarithmus ad quatuordecim loca non opus eſſe producere quotum ultra ſex loca. At ſi logarithmus ad decem tantum figurarum loca habere velis, ut à *Vlacquo* in ſuis Tabulis factum eſt, duæ primæ quotientis notæ ſufficiunt. Et ſi hac methodo computentur Logarithmi pro numeris ſupra 20000; labor omnis vix pluris erit, quam qui in exſcribendis numeris impenditur. Hæc Series ex iis quæ ab *Halleio* inventæ ſunt, facile ſequitur, qui autem plura de iis ſcire cupit, Præfatum Tractatum adeat & diſcat.

FINIS.

Fig. 1.

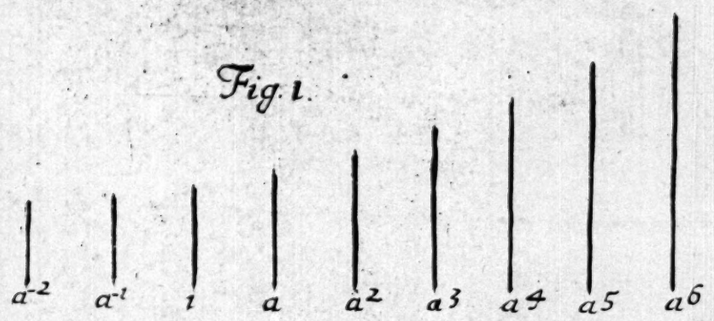


Fig. 2.

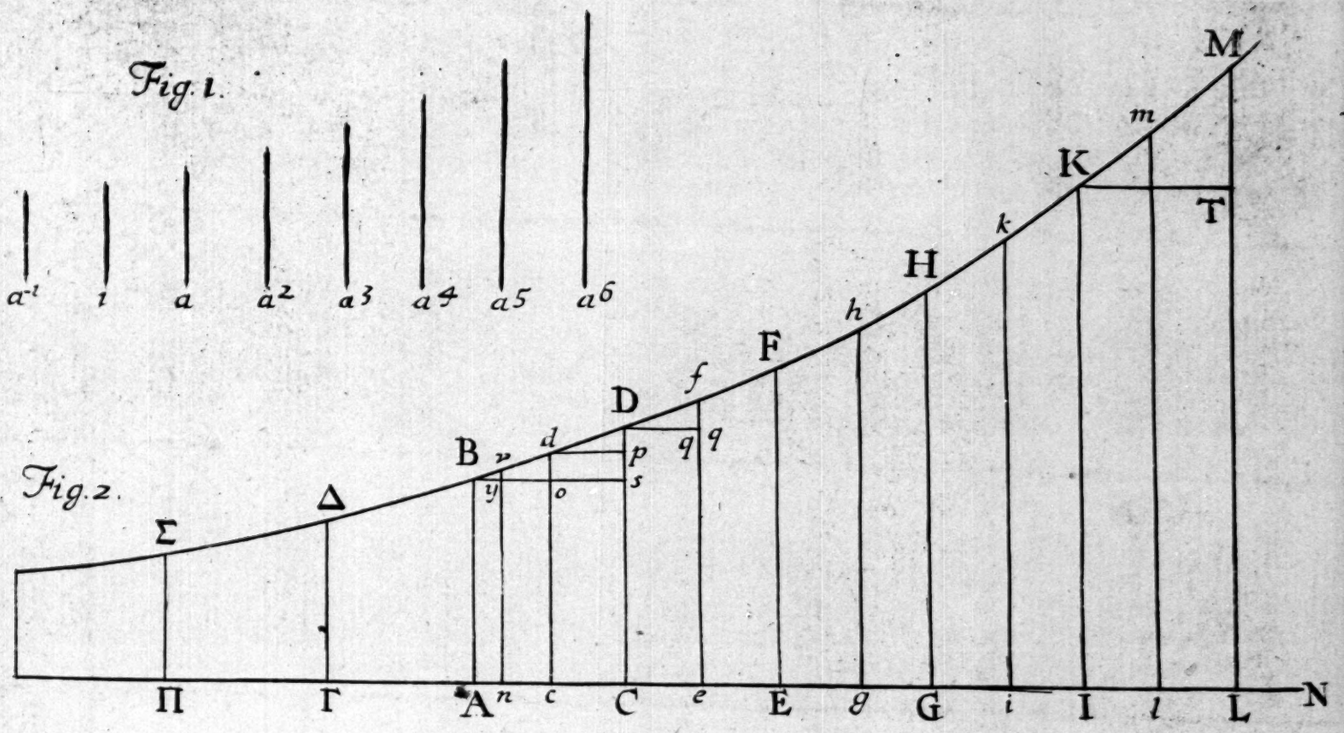
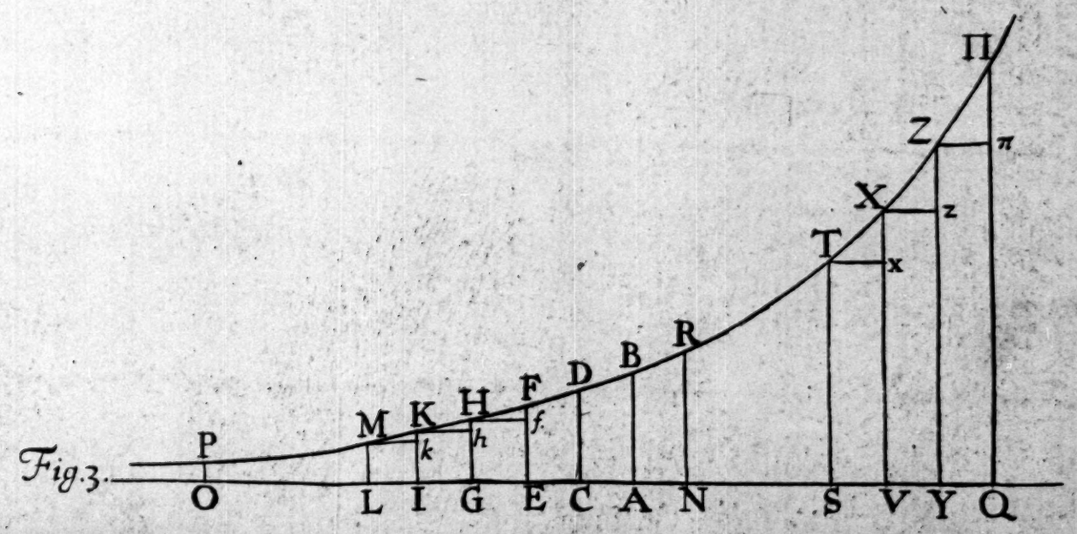


Fig. 3.



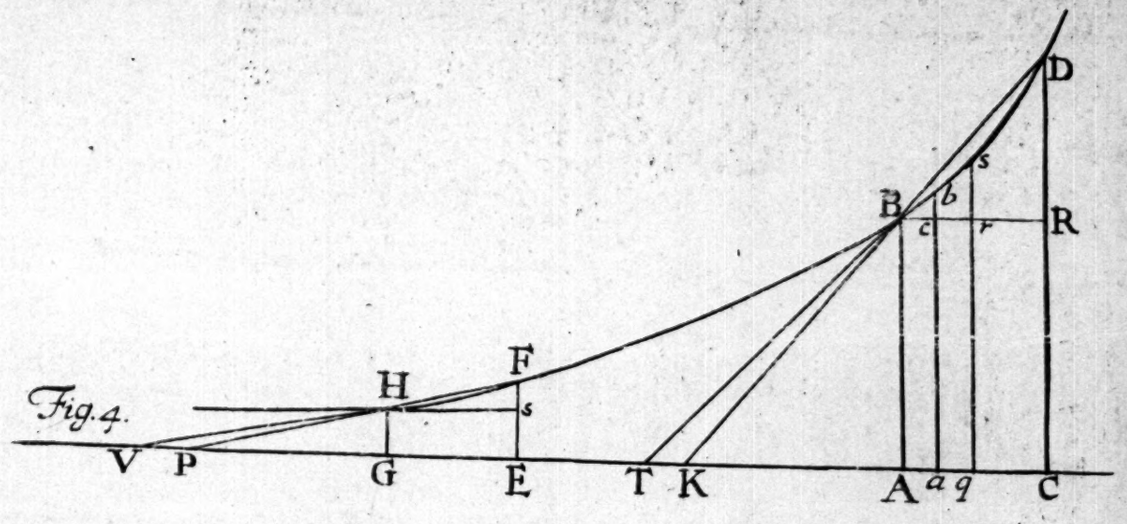


Fig. 4.

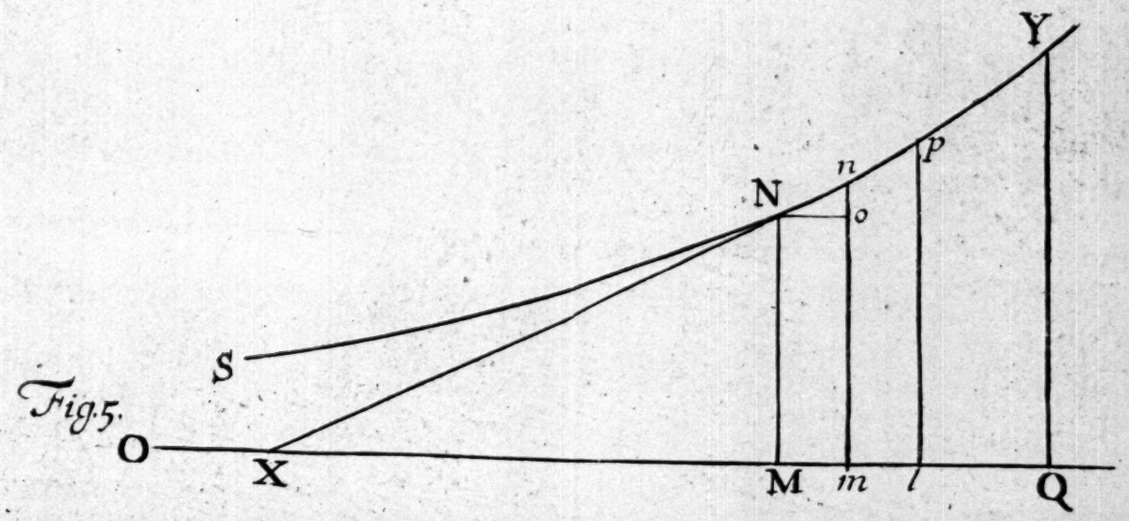


Fig. 5.

BOOKS *Printed and Sold by* Richard Clements *Bookſeller in* Oxford.

1 FOUR Sermons, by the Rev. George Fothergill, B. D. Fellow of Queen's College, Oxon. on publick occaſions, preach'd at Oxford: 1 At the Aſſizes held there, March 6. 1734-5. 2 On the Martyrdom of K. Charles I. 1744-5. 3 On a General Faſt-Day, Jan. 9. 1744-5. 4 And on the General Thankſgiving, Oct. 9. 1746.

2 The Four Goſpels in the Malayan Tongue, with a Preface, &c. by Dr Hyde.

3 Rogeri Aſchami Epiſtolarum, Libri Quatuor. Acceſſit Joannis Sturmii, aliorumque ad Aſchamum, angloſque alios eruditos Epiſtolarum Liber unus. 8vo.

4 Gloſſarium Antiquitatum Britannicarum, ſive Syllabus Etymologicus Antiquitatum veteris Britanniæ atque Iberniæ, Temporibus Romanorum Auctore Willielmo Baxter.

5 Inſtitutio Logicæ ad Communes Uſus accommodata, per Johannem Wallis, S. T. D. Geometriæ Profeſſorem Savilianum. Oxoniæ Editio Quinta, auctior & emendatior. 8vo.

6 De Antiquitate, Elegantia, Utilitate Linguæ Arabicæ, Oratio habita Oxonii, in Schola Linguarum VII Kalend. Auguſti, 1738. A Thoma Hunt, D. D. ex Aula Cervina, Linguæ Arabicæ Profeſſore.

7 A Diſſertation on Proverbs VII. 22, 23. being a Specimen of Critical Diſſertations on the Proverbs of Solomon: Addreſs'd to the Students in Arabic, and the other Oriental Languages, in the Univerſity of Oxford. By Thomas Hunt, D.D. of Hertford College, Profeſſor of Arabic. Price 6d.

8 Two Sermons preach'd before the Univerſity of Oxford. By Thomas Hutchinſon, D.D. of Hertford College, and Prebendary of Chicheſter.

9 Job's Expectations of a Reſurrection conſider'd. In Three Sermons preach'd before the Univerſity of Oxford. By Richard Brown, B.D. Fellow of Trinity College.

10 The Caſe of Naaman conſidered. A Sermon preach'd before the Univerſity of Oxford, by Richard Brown, B.D. Fellow of Trinity College.

11 Theodoſii Sphæricorum libri tres, Græce & Latine. Cura Joſ. Hunt è Coll. Bal.

12 The true Intellectual Syſtem of the Univerſe, by Ralph Cudworth, D. D. 2 vol. 4to.

13 Two

13 Two Diſſertations: the firſt, on The Tree of Life in Paradiſe, with Obſervations on the Fall of Man; the ſecond, on the Oblations of Cain and Abel. By Benjamin Kennicott, of Wadham College in Oxford. 8vo.

14 Caſpari Bartholini. Thom. S. Specimen Philoſophiæ Naturalis, præcipua Phyſices Capita exponens, in gratiam Juventutis Academicæ. Accedit de Fontium Fluviorumque Origine ex pluviis Diſſertatio Phyſica. 12mo. Oxon. 1713.

15 The Works of the late Right Reverend and Learned Dr Francis Hare, 4 vol. 8vo.

16 Ariſtotelis de Rhetorica ſeu Arte Dicendi Libri Tres, Gr. Lat. Cantab. 1728.

17 Dionyſii Halicarnaſſei de Structura Orationis Liber. Ex Recenſione Jacobi Upton. Gr. & Lat. 8vo.

18 Flavii Joſephi Opera, quæ reperiri potuerunt, omnia. Cum Notis Johann. Hudſon. Gr. Lat. 2 vol. fol.

19 Euſebius: or the True Chriſtian's Defence againſt a late Book entitul'd The Moral Philoſopher. By John Chapman, D.D. 2 vol. 8vo.

20 Epicteti quæ ſuperſunt Diſſertationes ab Arriano Collectæ, nec non Enchiridion & Fragmenta, Græce & Latine, in duos Tomos diſtributa. Cum integris Jacobi Schegkii & Hieronymi Wolffii ſelectiſque aliorum Doctorum Annotationibus. Recenſuit, notis & Indice illuſtravit Joannes Uptonus. Præbend. Roffenſis, 2 vol. 4to.

21 Pope's Homer's Iliad, 6 vol. fol.

22 Pope's Homer's Odyſſey, 5 vol. fol.

23 Grammatica Rationis ſive Inſtitutiones Logicæ. 12mo. Oxonii, è Theatro Sheldoniano.

24 Synopſis Metaphyſicæ Andreæ Fromenii, Editio ultima, Oxon.

25 Synopſis Communium Locorum, præcipuæ ad mores ſpectantium: ex poetis Latinis tum antiquioribus tum recentioribus collecta: & in capita cuique propria digeſta. Editio quinta accuratius recognita & caſtigata, 2mo.

26 Bibliotheca Biblica: Being a Commentary upon all the Books of the Old and New Teſtament, 5 vol. 4to. containing the 5 Books of Moſes, 5 vol. 4to.

27 Logicæ Artis Compendium. Authore Roberto Sanderſono, Epiſc. Lincoln. 12mo.

28 A Treatiſe of Fluxions. In Two Books. By Colin Maclaurin, A.M. Profeſſor of Mathematicks in the Univerſity of Edinburgh, and Fellow of the Royal Society, 2 vol. 4to.

29 Dio-

29 Dionyſii Halicarnaſſei de Structura Orationis Liber. Ex Recenſione Jacobi Uptoni, A.M. Collegii Regalis apud Cantab. nuper Socii. Qui & Veterem Interpretationem emendavit, & Notis Integris Frederici Sylburgii ſelectiſque aliorum, ſuas paſſim Animadverſiones adjecit. His acceſſerunt Simonis Burcovii Exempla Latina, cum duobus Indicibus. 8vo.

30 Ariſtotelis de Rhetorica ſeu Arte dicendi Libri tres, Gr. Lat. 8vo. Cantab. 1728.

31 The Eccleſiaſtical Hiſtories of Euſebius, Socrates, Sozomen and Theodoret, Faithfully Tranſlated and Abridg'd from the Originals. Together with a brief Account of the Lives of thoſe Hiſtorians, and ſeveral uſeful Notes and Illuſtrations, and a copious Index. By Mr Parker. The Third Edition, carefully review'd by the Author, and very much corrected, improv'd and enlarg'd. 4to.

32 XXXIX. Articuli Eccleſiæ Anglicanæ, textibus Sacr. Script. & Patrum primævorum Teſtimoniis confirmati, brevibuſque Notis illuſtrati. Adjectis inſuper Nominibus Auctorum lociſque in quibus Doctrina in Articulis contenta fuſius explicatur. Auctore Edv. Welchman Archidiacono Cardigan.

BRITISH MUSEUM
15
69
JUL

XLVII Prop: 1: Li:
Il est necessaire de prouver, que CA, AC font qu'une droite ligne, parce que dans la suite il faut prouver, que CC est parallele a FB.

XXXII Prop: Theo: II: 1: Li:
Les angles exterieurs avec les Interieurs de chacune figure font deux fois autant des angles droits, qu'il y a des côtés dans la même figure, parce que une droite ligne, tombant sur une autre, fait necessairement des angles egaux aux deux droits, et en chacune figure autant des lignes droites tombent sur les autres, qu'il y en a dans la figure: Des lignes droites donc de chacune figure font deux fois autant des Angles droits, qu'il y a des côtés.